

THESE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS
(Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Secteur de Recherche : Automatique et Application

Présentée par

MANHAL ABOUZLAM

Optimisation d'un procédé de traitement des eaux par ozonation catalytique

Directeur de thèse : Driss MEHDI Université de Poitiers, LIAS
Co-encadrant : Régis OUVRARD Université de Poitiers, LIAS

Présentée et soutenue publiquement le 10 Janvier 2014

JURY

Président :	José RAGOT	Professeur des Universités CRAN, INPL Nancy
Rapporteurs :	Jean-Pierre CORRIOU	Professeur des Universités LRGP, ENSIC Nancy
	Jérôme HARMAND	Directeur de Recherche LBE-INRA Narbonne
Examineurs :	Florence PONTLEVOY	Docteur TECHNAVOX SEREP
	Bertrand GOMBERT	Docteur-Ingénieur IC2MP, Université de Poitiers
	Driss MEHDI	Professeur des Universités LIAS, Université de Poitiers
	Régis OUVRARD	Maître de Conférences Université de Poitiers, LIAS

J'espère que cette thèse soit parmi les bonnes œuvres

Remerciement

Cette étude a été effectuée au Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes (LIAS) de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP). Elle s'est déroulée dans le cadre du Contrat de Projets État-Région (CPER 2007-2013) Eaux & Sols de l'Université de Poitiers et avec le soutien financier de l'Université d'Alep dans le cadre d'un programme franco-syrien.

Ce travail a été mené sous la direction de Monsieur Driss Mehdi, Professeur à l'Université de Poitiers. Je lui exprime ma profonde gratitude pour son soutien scientifique, ses qualités humaines et sa gentillesse. J'ai appris de lui la persévérance dans la recherche et la façon de mener une réflexion pour résoudre les problèmes scientifiques. Il avait le rôle essentiel de me donner la base scientifique en commande. Ce domaine est essentiel dans toutes les applications d'automatique en industrie. Merci beaucoup Driss.

Cette étude a également été encadrée par Monsieur Régis Ouvrard, Maître de conférences à l'Université de Poitiers, que je remercie infiniment pour son soutien scientifique et la confiance qu'il m'a accordée pendant ce travail. Merci également pour ses qualités humaines, sa sympathie et son bon cœur. Je lui exprime mes grands remerciements pour ses conseils scientifiques, sa disponibilité et l'apport autant scientifique qu'humain qu'il a su me transmettre. J'apprécie son rôle important dans les connaissances en identification qu'il a su me transmettre. Un merci infini à lui pour tout ce qu'il a fait pour moi pendant ma présence en France. Il a encadré mon travail de telle manière qu'il m'a permis de prendre plus confiance en moi. Je vous remercie tout particulièrement pour cette confiance. Merci beaucoup Régis.

Mes sincères remerciements sont également destinés à Monsieur Gérard Champenois, Professeur à l'Université de Poitiers, pour le bon accueil lors de ma première année au laboratoire lorsqu'il était directeur. Je n'oublie pas de remercier également Monsieur Patrick Coirault, Professeur à l'Université de Poitiers et directeur du la-

boratoire LIAS.

J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur Jean Pierre Corriou, Professeur au Laboratoire de Réactions et Génie des Procédés (LRGP) à Nancy, et à Monsieur Jérôme Harmand, Directeur de Recherche en automatique au Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement de l'INRA à Narbonne, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également Monsieur José Ragot, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), de m'honorer de sa présence dans le jury en tant qu'examineur du manuscrit.

Ma profonde gratitude à Monsieur Bertrand Gombert, Docteur-Ingénieur de recherche à l'Institut de Chimie des Milieux et Matériaux de Poitiers, pour ses conseils scientifiques en chimie. Il a joué un rôle très important dans l'avancement de la thèse. Merci beaucoup à lui.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Madame Florence Pontlevoy, Docteur de l'Université de Poitiers et Directrice de l'entreprise TECHNAVOX, pour faire partie des membres du jury, et surtout pour l'attention qu'elle nous a accordée sur le pilote expérimental qu'elle a inventé. Je la remercie beaucoup pour ses conseils et ses idées scientifiques durant ces années de thèse.

Je n'oublie pas d'exprimer mes sincères remerciements et mon respect à Monsieur Thierry Poinot, Professeur à l'Université de Poitiers. J'ai eu l'honneur d'être son élève en Master. Il avait le rôle important de me transmettre les bases de l'automatique. Merci bien à lui pour ses encouragements et ses conseils scientifiques.

Je suis aussi très reconnaissant envers Madame Nathalie Karpel Vel Leitner, Directrice de recherche à l'Institut de Chimie des milieux et Matériaux de Poitiers, et Monsieur Olivier Bachelier, Professeur à l'Université de Poitiers. Mes remerciements vont également à Monsieur Afzal Chamroo, à Madame Sandrine Moreau, à Monsieur Guillaume Mercère, Maitres de conférences à l'Université de Poitiers, et à Monsieur Sahidou Boukari, Docteur-Ingénieur des études à l'Institut de Chimie des Milieux et Matériaux de Poitiers.

Mes meilleurs sentiments sont adressés à mes collègues et à mes amis avec qui j'ai passé de bons moments durant ces années de thèse.

Mes remerciements les plus chaleureux sont destinés à ma mère, mon père, mes sœurs et mes frères pour leurs soutiens et leurs encouragements ; qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance et de tout mon amour. Mes meilleurs sentiments et ma profonde gratitude à mon épouse Arwa pour sa patience, son soutien, sa

générosité et sa sympathie. Evidemment, je n'oublie pas d'exprimer mes plus chaleureux sentiments et mon amour à mes filles : Kawsar, Sarah et Hanine dont sa chère âme est toujours avec moi et habite chaque seconde de ma vie et à qui j'offre cette thèse. Je vous aime tous.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Procédé d'ozonation catalytique	5
1.1 Introduction	5
1.2 Le traitement des eaux	5
1.2.1 Principales technologies du traitement des eaux	5
1.2.2 Les eaux usées	6
1.2.3 Principaux indicateurs de qualité des eaux résiduaires	7
1.2.4 Principales étapes du traitement des eaux usées	8
1.3 L'oxydation	12
1.3.1 Procédé d'oxydation avancée	13
1.3.2 Problème d'optimisation des POAs	16
1.4 Formulation du problème	17
1.5 Le procédé d'ozonation catalytique	18
1.5.1 Ozonation	18
1.5.2 Ozonation catalytique	18
1.5.3 Principe du procédé	20
1.5.4 Mécanisme d'action	21
1.5.5 Le pilote d'ozonation catalytique	22
1.5.6 Effluents à traiter	23
1.6 Instrumentation du pilote	24
1.6.1 Ozone dans les événements	24
1.6.2 Indicateur d'abattement du polluant	25
1.6.3 Système d'acquisition	30
1.7 Méthodologie appliquée	31
1.7.1 Définition des entrées-sorties du système	31
1.7.2 Identification	32
1.7.3 Synthèse de loi de commande	33
1.7.4 Analyse de robustesse	33
1.8 Conclusion	33

2	Identification du procédé	35
2.1	Introduction et objectifs	35
2.2	Description des outils utilisés	37
2.2.1	Les modèles	37
2.2.2	Les algorithmes d'estimation paramétrique	39
2.3	Applications	50
2.3.1	Recherche du point de fonctionnement	50
2.3.2	Protocole d'identification	51
2.3.3	Conditions expérimentales	54
2.3.4	Identification du transfert Oz_{out}/P	54
2.3.5	Identification des transferts Oz_{out}/P et Abs/P	55
2.3.6	Identification non linéaire du transfert Oz_{out}/P (Abouzlam <i>et al.</i> (2012b))	59
2.4	Conclusion	61
3	Commande du procédé	65
3.1	Introduction et objectifs	65
3.2	Description des approches développées	66
3.2.1	Commande par modèle interne	66
3.2.2	Commande optimale	69
3.2.3	Synthèse H_∞	75
3.3	Applications	81
3.3.1	Commande par hystérésis de l'absorbance Abs	82
3.3.2	Commande directe de l'absorbance Abs	97
3.4	Bilan énergétique de la commande directe	118
3.5	Conclusion	120
	Conclusion générale	123
A	Preuves des théorèmes	127
A.1	Preuve du théorème 3.1	127
A.2	Preuve du théorème 3.2	131
B	Schémas Simulink des commandes implémentées	139
B.1	Commande par hystérésis avec l'approche commande par modèle in- terne	140
B.2	Commande par hystérésis avec l'approche commande optimale	141
B.3	Commande directe avec l'approche commande optimale	142
B.4	Commande directe avec l'approche commande H_∞	143
	Bibliographie	143
	Abstract	155
	Résumé	157

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le traitement des eaux est indispensable pour la préservation de notre environnement. Il permet de limiter l'impact des diverses pollutions liées à l'activité humaine. L'eau est également nécessaire à la vie ; sa consommation quotidienne est au centre des préoccupations de santé publique, et le traitement joue un rôle essentiel dans la production d'une eau potable.

Il existe de nombreuses techniques dans le domaine du traitement des eaux (Metcalf and Eddy, Inc. (2002)) pour supprimer des matières solides, de l'huile, des graisses, des composés organiques biodégradables ou non-biodégradables, des molécules toxiques, etc. Ces techniques, appliquées seules ou en cascade, permettent d'améliorer le niveau de traitement. Les procédés d'oxydation avancée (POAs ou advanced oxidation processes en anglais) occupent une place très importante parmi les différentes technologies de traitement (Cheremisinoff (2002)), et sont largement utilisées, notamment pour les effluents industriels.

Les POAs, classés dans les technologies de traitement chimique, ont pour objectif d'améliorer le niveau d'oxydation en produisant des radicaux libres hautement réactifs, et plus particulièrement le radical hydroxyle OH^\bullet (Glaze *et al.* (1987); Gogate et Pandit (2004)). L'ozonation catalytique fait partie de ces procédés, et, dans ce cas, le catalyseur permet de meilleures performances à la fois en termes de vitesse de réaction et de consommation énergétique (Legube et Karpel Vel Leitner (1999); Luck *et al.* (1997); Pontlevoy *et al.* (2003)).

L'efficacité de l'oxydation et le fait de ne pas former de résidus solides, tels que les boues d'épuration, sont les principaux avantages des POAs. Par contre, l'inconvénient majeur réside généralement dans le coût élevé de fonctionnement en raison des besoins énergétiques et chimiques (Water Environment Federation (2008)). Ceci constitue un frein au développement industriel de beaucoup de technologies selon une étude récente (Oller *et al.* (2011)).

Souvent, la mise en œuvre industrielle des POAs, et tout particulièrement celle

des procédés d’ozonation, fonctionne en boucle ouverte. La régulation pour atteindre les objectifs spécifiés à moindre coût n’est généralement pas considérée. Pourtant, la commande des procédés chimiques est largement répandue ; citons à ce sujet les ouvrages (Corriou (1996, 2001, 2004)).

Dans le cadre de ce mémoire de thèse, l’optimisation d’un pilote d’ozonation catalytique est considérée. Le principal objectif est de réduire le coût de fonctionnement du procédé tout en atteignant les objectifs de rejet spécifiés. Cet objectif est atteint par la mise au point de boucles de régulation permettant de diminuer la quantité d’oxygène consommée et la puissance appliquée sur l’ozoneur, en limitant ainsi l’ozone en excès évacué dans les événements du réacteur.

Un objectif à plus long terme est, à partir des connaissances acquises sur le pilote, d’aboutir à des boucles de régulation et des capteurs logiciels qui pourront faciliter la supervision et la maintenance de station de traitement des eaux.

Le mémoire est décomposé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du pilote d’ozonation catalytique. Cette partie du mémoire présente, avec le regard du chimiste et de l’ingénieur de génie des procédés, les principales étapes du traitement des eaux, l’oxydation et les procédés d’oxydation avancée, le pilote et son instrumentation. A la fin du chapitre, le pilote est vu comme un système présentant des entrées et des sorties, une vue “système” plus adaptée à l’automaticien pour permettre l’identification et la commande du procédé.

Le deuxième chapitre comprend la partie modélisation et identification. Les méthodes d’identification de système utilisées sont présentées. Des essais expérimentaux sont réalisés pour l’estimation paramétrique. Les objectifs d’utilisation envisagés mènent à deux types de modèle. Un modèle linéaire, présentant correctement les dynamiques du procédé, doit permettre la synthèse des lois de commande nécessaires à la régulation. Un modèle non linéaire plus précis doit permettre la conception d’un simulateur pour tester les lois de commande en boucle fermée avant les essais expérimentaux.

Dans le troisième chapitre, la partie commande est présentée. Les trois méthodes utilisées sont décrites : la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ . Deux approches distinctes ont été testées : l’approche de commande par hystérésis et l’approche de commande directe. Une analyse de la stabilité est faite pour évaluer la robustesse du système en boucle fermée par rapport aux retards. Les différents correcteurs sont validés en simulation et sur le pilote.

Ces travaux se sont déroulés dans le cadre du programme Eaux & Sols inscrit

dans le Contrat de Projets État-Région (CPER 2007-2013) de l'Université de Poitiers avec l'aide financière du gouvernement syrien. Ils ont également bénéficié de financement dans le cadre d'une Action Incitative de l'Université de Poitiers et du département de la Vienne. Enfin, le procédé d'ozonation catalytique étudié a fait l'objet d'un brevet (Technavox Patent n° FR 0300259).

PROCÉDÉ D'OZONATION CATALYTIQUE

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter le domaine applicatif dans lequel s'est déroulée cette thèse. Il s'agit de décrire le traitement des eaux au sens large, les procédés d'oxydation avancée et les problèmes qu'ils rencontrent pour leur application industrielle, et enfin, plus particulièrement, le pilote d'ozonation catalytique qui fait l'objet de cette étude.

La lecture de ce chapitre par un non-spécialiste de la chimie et du génie des procédés sera par moments ardues. Au final, le procédé étudié sera considéré comme tout système présentant des entrées-sorties. C'est avec l'approche système de l'automatique que le pilote d'ozonation catalytique sera appréhendé dans les chapitres suivants.

1.2 Le traitement des eaux

Le traitement des eaux est nécessaire à la préservation de notre environnement altéré par de nombreuses pollutions. Il est ainsi indispensable de traiter les eaux usées urbaines et industrielles avant leur rejet dans le milieu naturel. De façon parallèle à la dégradation des ressources en eau, le traitement des eaux de surface et des eaux souterraines pour la production d'eau potable est au centre des préoccupations de santé publique.

1.2.1 Principales technologies du traitement des eaux

Les méthodes utilisées et les filières de traitement définies dépendent de l'origine des eaux à traiter et de l'objectif du traitement lié à la qualité du milieu récepteur. Les principales techniques mises en œuvre en traitement des eaux sont de nature

physique, chimique, physico-chimique ou biologique.

Le premier objectif de toute filière de traitement relève du domaine de la clarification afin d'éliminer les matières en suspension présentes dans les eaux (séparation solide-liquide). On distingue notamment les actions physiques suivantes : dégrillage, tamisage, coagulation-floculation-décantation et filtration.

Les méthodes chimiques de traitement reposent sur l'interaction chimique entre les polluants à traiter et les réactifs qui aident à la séparation des polluants de l'eau, à la destruction ou à la neutralisation des effets nocifs associés à ces polluants.

Dans les méthodes biologiques, des procédés aérobies et anaérobies sont mis en œuvre. Dans ceux-ci, des micro-organismes jouent un rôle majeur permettant de dégrader les composés organiques présents dans l'effluent.

Ces différentes technologies sont généralement combinées en fonction de la qualité de l'eau à traiter et des objectifs du traitement. Les techniques chimiques d'oxydation, et notamment les procédés d'oxydation avancée POAs étudiés dans ce mémoire, ont souvent une place très importante parmi les différentes techniques de traitement (Cheremisinoff (2002)).

1.2.2 Les eaux usées

Les eaux usées peuvent être classées en trois types : les eaux résiduaires domestiques, les eaux pluviales et les eaux industrielles.

Les eaux résiduaires domestiques ont des caractéristiques assez peu variables, et sont chargées principalement en matières organiques.

Les eaux pluviales peuvent poser un problème pour les stations d'épuration, particulièrement pendant les périodes orageuses, quand le système d'assainissement est commun (domestiques et pluviales). Ces eaux vont alors diluer les eaux domestiques et perturber le bon fonctionnement des stations d'épuration. L'eau de pluie peut également être en contact avec les polluants présents dans l'atmosphère et dans les fumées industrielles, ou se charger, après ruissellement, d'hydrocarbures ou d'autres polluants présents sur les sols urbains et les toitures.

Pour les eaux usées industrielles, leurs caractéristiques sont fonction de l'industrie considérée. Elles peuvent être chargées d'une grande variété de polluants : matières organiques, métaux lourds, produits toxiques, hydrocarbures, etc.

Dans cette étude, on va considérer un effluent représentatif des eaux industrielles, car l'ozonation peut être utilisée pour ce type d'eaux usées.

1.2.3 Principaux indicateurs de qualité des eaux résiduaires

Dans le domaine du traitement des eaux, divers paramètres sont utilisés pour mesurer la qualité d'une eau. Ces paramètres sont essentiels dans la conception d'une station d'épuration, dans le choix d'un procédé de traitement, dans le dosage de réactifs et/ou dans la mesure de l'abattement des polluants. Les principaux indicateurs sont :

- La température.
- Le potentiel d'Hydrogène (pH) qui mesure l'activité de l'ion hydrogène dans une solution. Les valeurs inférieures à 7 indiquent l'acidité et celles supérieures à 7 indiquent l'alcalinité.
- Les Matières En Suspension (MES) comprennent les matières insolubles qui sont en suspension dans le liquide, comme les matières organiques et minérales de taille importante. Ce paramètre est exprimé en mg/L .
- La Demande Chimique en Oxygène (DCO) est la concentration, exprimée en mg/L , d'oxygène équivalente à la quantité de dichromate consommée par la matière organique contenue dans l'échantillon soumis à l'oxydation par dichromate de potassium, dans des conditions précises (American Public Health Association and American Water Works Association and Water Environment Federation (1998)). Cette DCO représente la quantité de dioxygène O_2 consommée par toutes les matières réductrices présentes dans les eaux.
- La Demande Biologique en Oxygène (DBO_5) est la quantité, exprimée en mg/L , d'oxygène consommée par l'activité bactérienne pour dégrader les matières organiques biodégradables en 5 jours (à 20 °C et dans l'obscurité). La DBO_5 constitue une fraction de la DCO.
- La pollution azotée se caractérise par des formes réduites et oxydées. L'azote Kjeldahl (NTK) indique la forme organique et ammoniacal d'azote (formes réduites). Il est exprimé en mg/L .
- L'azote global (NGL) mesure la quantité d'azote global comprenant toutes les formes (réduites et oxydées) : organique, ammoniacal, nitrites NO_2^- , nitrates NO_3^- . Cet indicateur est exprimé en mg/L .
- Le Phosphore Total (PT) indique les dérivées du phosphore comme les phosphates et les composés organiques phosphorés. Il est exprimé en mg/L .
- Les métaux lourds comme le cadmium, le chrome, le cuivre, etc.
- Les hydrocarbures totaux.

1.2.4 Principales étapes du traitement des eaux usées

1.2.4.1 Pré-traitements

Cette étape importante est destinée à retenir les débris solides volumineux, les sables, les huiles et les graisses à l'entrée de la chaîne de traitement.

- **Dégrillage** : A l'arrivée, les eaux usées sont soumises à cette opération qui consiste à retenir les gros débris solides par une grille métallique ou un tamis tournant automatique. Les solides sont ensuite envoyés en décharge ou à une unité d'incinération.

- **Dessablage, déshuilage** : Pour effectuer ces deux opérations, un ouvrage commun est généralement utilisé.

Le dessablage permet l'élimination des matières en suspension de taille importante ou de densité élevée via un décanteur classique. Cette étape est indispensable pour ne pas avoir une obstruction des canalisations ou une abrasion des équipements. Les sables extraits sont souvent envoyés en décharge.

Le déshuilage est réalisé par coalescence (présence de chicanes favorisant la séparation des phases) ou par flottation. Pour cette dernière, une injection de fines bulles d'air permet la remontée rapide des graisses dans le bassin. Ces matières flottées sont éliminées en raclant la surface. Cette étape est indispensable et très importante pour protéger les réacteurs biologiques, car ces corps flottés perturbent les échanges gazeux et influencent négativement les traitements biologiques qui utilisent l'oxygène pour oxyder les molécules organiques.

1.2.4.2 Clarification et procédés séparatifs

- **Décantation** : L'opération consiste à séparer les particules, qui sont en suspension dans la phase aqueuse, en les laissant sédimenter vers le fond d'un bassin sous l'action de la gravitation. Dans le cas où les particules sont très fines, un ajout de réactifs chimiques spécifiques permet la coagulation-floculation de ces matières par l'augmentation de leur diamètre et donc la décantation effective.

- **Coagulation - Floculation** : L'utilisation des coagulants et des floculants, dans les procédés physico-chimiques, joue un rôle très important et est efficace en épuration des eaux. Le principe consiste à utiliser des réactifs chimiques qui aident à séparer les polluants de l'eau par différentes techniques et notamment par décantation.

Ces procédés sont coûteux et conduisent à une production importante de boues. Par contre, la réponse rapide à toute variation de charge est le principal avantage de ces procédés. Ces techniques peuvent être incluses dans des stations compactes

avec un encombrement compatible avec des bâtiments fermés.

La coagulation et la floculation sont l'épine dorsale de la plupart des stations de traitement des eaux usées. Leur objectif est d'améliorer la séparation des espèces de particules en amont des étapes de décantation et de filtration. Les particules colloïdales et d'autres matières finement divisées sont réunies et agglomérées pour former des particules de taille plus grande, les floccs, qui peuvent ensuite être éliminées d'une manière plus facile et efficace. Ces techniques ont d'abord été utilisées pour l'élimination de la turbidité de l'eau potable. Plus récemment, ces procédés ont montré leur efficacité pour l'élimination d'autres polluants adsorbés par les colloïdes, comme les métaux, les matières organiques toxiques, les virus et les radionucléides (Rao *et al.* (1988); Sawyer *et al.* (1994)). Les techniques avancées sont efficaces pour éliminer des polluants comme l'arsenic (U.S. Environmental Protection Agency (2000); Cheng *et al.* (1994)), des parasites tels que le *Cryptosporidium* et la *Giardia* (Logsdon *et al.* (1985)), ou des matériaux humiques (U.S. Environmental Protection Agency (1999); Knocke *et al.* (1986)). Les mécanismes impliqués peuvent être décrits en deux étapes séquentielles (Amirtharajah et O'Melia (1999)) :

- la déstabilisation des particules colloïdales (neutralisation des forces de répulsion électrostatique inter-colloïdales),
- les collisions interparticulaires conduisant à l'agglomération des particules.

La première étape est la coagulation qui est généralement rapide et a lieu dans une cuve de mélange rapide. Elle est habituellement obtenue par l'ajout de coagulants inorganiques tels que les sels d'aluminium, les sels de fer, et/ou les polymères organiques synthétiques communément appelés polyélectrolytes .

La seconde étape est la floculation, qui concerne les collisions entre les particules déstabilisées et la formation des floccs. C'est un processus lent réalisé dans un réservoir de mélange lent appelé le réservoir de floculation, où le taux des rencontres entre les particules déstabilisées doit être important pour que les floccs formés soient les plus gros et les plus denses possible. La floculation peut être améliorée par l'ajout de polymères (Wan *et al.* (2005)).

- **Autres procédés séparatifs** : La filtration est un processus de finition de la clarification. La filtration va pouvoir retenir les particules en suspension, mais elle pourra également agir par adsorption (notamment en utilisant du charbon actif) ou encore être le siège de processus biologique.

Des techniques membranaires sont également souvent utilisées en traitement des eaux. On distingue selon la dimension des éléments retenus par les membranes : la microfiltration, l'ultrafiltration, la nanofiltration ou encore l'osmose inverse.

1.2.4.3 Traitements biologiques

A l'issue de la décantation et des traitements physico-chimiques nécessaires à la clarification, les matières en suspension ont disparu, et il ne reste que des composés dissous. Les procédés biologiques sont alors souvent utilisés pour les éliminer. Ces procédés, basés sur l'activité bactérienne dégradant les composés organiques, sont classés en deux groupes selon le genre de bactéries présentes dans l'eau :

- les procédés aérobies nécessitant la présence d'oxygène,
- les procédés anaérobies se développant en absence d'oxygène.

Il existe plusieurs procédés biologiques d'épuration. On distingue souvent les procédés biologiques extensifs et les procédés biologiques intensifs.

- **Les procédés biologiques extensifs** : Dans ces procédés, tout se passe naturellement sans intervention artificielle et mécanique. Parmi ces procédés, on peut citer :

- L'épuration par le sol qui compte sur les propriétés de filtration et la capacité du sol à assimiler une masse bactérienne active.
- Le lagunage qui consiste en un bassin d'eau, appelé lagune, peu profond, aéré ou non aéré. Les lagunes non aérées comprennent des lagunes anaérobies, aérobies et facultatives (Water Environment Federation (2007)). La lagune aérobie, par exemple, profite de l'oxygène fourni par la photosynthèse des algues de surface. Cet apport d'oxygène naturel accélère l'activité bactérienne pour éliminer les composés organiques présents dans la lagune.

- **Les procédés biologiques intensifs** : La prolifération des bactéries est activée artificiellement dans ces procédés. Ils peuvent appartenir à deux grandes catégories :

- Les procédés biologiques à "culture libre" : les bactéries sont en suspension (boues activées) et en contact permanent avec les matières organiques. De l'oxygène est diffusé par agitation ou injection d'air ou d'oxygène.
- Les procédés biologiques à "culture fixe" : les bactéries ici ne sont pas en suspension dans l'eau à traiter. Ces micro-organismes se développent sur un support comme des cailloux, du plastique, ... Ce film bactérien développé sur les surfaces du support constitue ce qui s'appelle le biofilm et permet la dégradation des matières organiques.

1.2.4.4 Désinfection

Une désinfection des eaux usées peut être souhaitée. Elle est alors obtenue en utilisant une grande variété de méthodes :

- chimiques (avec la chloration ou l'ozonation, par exemple) ;
- physiques (par rayonnement ultraviolet ou filtration membranaire, par exemple) ;
- biologiques (avec le lagunage, par exemple).

- **Chloration** : Le chlore, utilisé pour désinfecter les eaux usées, se présente soit sous forme gazeuse (Cl_2), soit sous forme de sels d'hypochlorite. Le chlore gazeux réagit avec l'eau pour produire l'acide hypochloreux ($HOCl$), qui se dissocie rapidement pour former l'ion hypochlorite selon la réaction suivante :



En traitement des eaux, le "chlore total" est distingué entre le "chlore libre" que constituent l'acide hypochloreux $HOCl$ et l'ion hypochlorite (OCl^-) et le "chlore combiné" sous la forme monochloramine (NH_2Cl), dichloramine ($NHCl_2$), trichloramine (NCl_3) et molécules organochlorées. La forme dominante du chlore est fonction de plusieurs paramètres comme la température, le pH et les concentrations d'ammoniac. La connaissance de la forme dominante du chlore pour un processus particulier de désinfection est importante. Avec les différentes formes, on aura une différence au niveau des forces oxydantes du chlore et donc une efficacité biocide variable. La désinfection au chlore se produit principalement par l'oxydation des parois cellulaires qui conduit à la lyse des cellules bactériennes ou à l'inactivation des sites fonctionnels sur la surface de ces cellules (EPA Victoria (2002)).

- **Chloration-déchloration** : Pour limiter les effets nocifs du chlore sur la vie aquatique, une déchloration peut être appliquée après la désinfection des eaux par le chlore. Cette technique permet d'éliminer les effets indésirables du chlore résiduel et de certains composés toxiques associés à la chloration. Le dioxyde de soufre (SO_2) est couramment utilisé. D'autres produits chimiques peuvent être utilisés comme le sulfite de sodium (Na_2SO_3), bisulfite de sodium ($NaHSO_3$), métabisulfite de sodium ($Na_2S_2O_5$) et thiosulfate de sodium ($Na_2S_2O_3$). Le charbon actif peut également être utilisé pour la déchloration (Eddy *et al.* (2007)).

- **Ozonation** : De même que le chlore, l'ozone est un oxydant. L'efficacité et la rapidité de l'action de ce gaz en solution sur les bactéries et les virus, couplées avec une faible production de produits secondaires indésirables, lui donne une place très importante parmi les oxydants utilisés pour la désinfection. De plus, l'ozonation est plus sûre d'emploi que la chloration et ne nécessite pas le transport de produits chimiques, puisque ce gaz est généré *in situ* à partir du dioxygène soumis à une décharge électrique. Au niveau environnemental, l'ozone est très toxique pour la vie aquatique, mais il est rare, après la désinfection, de trouver de l'ozone résiduel en quantité significative, car sa réaction avec les composés présents est très rapide et il est détruit rapidement en raison de son instabilité.

Par contre, les coûts élevés de l'investissement et l'exploitation de l'ozonation posent un problème économique rendant cette opération d'oxydation peu attrayante.

- **Rayonnement ultraviolet** : La désinfection des eaux usées par le rayonnement ultraviolet (UV) est un processus physique qui implique essentiellement le passage d'un film d'eaux usées dans un canal ouvert muni de lampes à rayons ultraviolets. L'efficacité de la désinfection UV dépend des caractéristiques physiques et chimiques des eaux usées avant la désinfection. Avec une meilleure qualité des eaux usées, le processus de désinfection UV est plus efficace (EPA Victoria (2002)).

Cette technologie de désinfection présente plusieurs avantages intéressants. Au niveau du traitement, elle est plus efficace que la chloration et la chloration-déchloration pour détruire les virus. De plus, aucun produit secondaire n'est formé. Au niveau environnemental, cette méthode n'a pas d'influence négative car le rayonnement ultraviolet ne nécessite pas l'ajout de produit chimique.

Par contre, l'efficacité de désinfection diminue avec l'augmentation de la concentration des matières en suspension.

D'un point de vue économique, les coûts sont comparables à ceux des systèmes de la chloration-déchloration.

- **Filtration** : La filtration sur sable ou sur d'autres média filtrants permet de réduire le nombre de micro-organismes. De même, les technologies membranaires désinfectent les eaux usées en filtrant physiquement les micro-organismes. Ce procédé de désinfection ne nécessite pas l'ajout de réactif chimique et ne forme pas de sous-produit toxique.

La microfiltration est la technologie la plus intéressante commercialement pour la désinfection. Les eaux usées passent à travers les fibres de la membrane, cylindres creux imprégnés de millions de pores microscopiques. Ces pores agissent comme une barrière physique aux particules et aux micro-organismes. La microfiltration élimine efficacement les particules, les algues, les protozoaires et les bactéries.

- **Lagunage** : Le lagunage n'est pas, en soi, une méthode de désinfection mais il permet d'atteindre une qualité microbienne acceptable de l'effluent.

1.3 L'oxydation

Les procédés chimiques d'oxydation interviennent à différents niveaux dans le traitement des eaux (production d'eau potable, dépollution des eaux usées indus-

trielles, désinfection des eaux en sortie de station d'épuration). Les oxydants chimiques sont utilisés pour l'oxydation : des espèces inorganiques réduites, avec le fer ferreux $Fe(II)$, le manganèse manganoux $Mn(II)$ et le sulfure $S(-II)$; des micropolluants inorganiques tels que l'arsenic, des composés organiques synthétiques dangereux tels que le trichloroéthène; et d'autres polluants émergents tels que le méthyle-tert-butyl-éther, les pesticides, les composés actifs pharmaceutiques, les perturbateurs endocriniens ou les toxines algales...

Les oxydants chimiques les plus couramment utilisés dans le traitement de l'eau sont le chlore, l'ozone, le dioxyde de chlore et le permanganate. L'ozone est parfois utilisé en conjonction avec le peroxyde d'hydrogène ou le rayonnement ultraviolet pour produire des radicaux libres qui ont des propriétés puissantes d'oxydation (Edzwald and American Water Works Association (2010)). Ces radicaux libres peuvent être mis en œuvre pour éliminer une partie de la pollution organique (DCO) et en favoriser le caractère biodégradable (élimination de la DCO réfractaire).

1.3.1 Procédé d'oxydation avancée

Les procédés d'oxydation avancée (POAs) sont définis comme des procédés de traitement des eaux fonctionnant à température et pression ambiante, et qui impliquent la génération d'un oxydant secondaire plus puissant à partir d'un oxydant primaire (Glaze *et al.* (1987)). Ces procédés consistent à produire des radicaux libres hautement réactifs, et plus particulièrement le radical hydroxyle OH^\bullet .

Les POAs ont pour objectif d'obtenir des rendements d'oxydation plus importants pour des polluants difficiles à oxyder, même sous l'action de l'ozone qui est l'oxydant primaire possédant le potentiel d'oxydo-réduction le plus élevé parmi les oxydants traditionnellement utilisés en traitement des eaux (Baig et Mouchet (2010)). Ils sont principalement utilisés dans l'élimination des polluants organiques spécifiques, comme par exemple les composés donnant un goût ou des odeurs qui sont résistants aux traitements utilisant d'autres oxydants. L'intérêt pour l'élimination d'une grande gamme d'autres polluants organiques est également mis en avant (Edzwald and American Water Works Association (2010)).

Le grand avantage pour de nombreux POAs est qu'ils ne forment souvent pas de solides résiduels dans toutes les étapes du processus (ce n'est néanmoins pas le cas de tous, par exemple le procédé Fenton H_2O_2/Fe génère des boues). Par contre, l'inconvénient principal est que beaucoup de ces procédés sont coûteux à exploiter en raison des besoins énergétiques et chimiques (Water Environment Federation (2008)).

Les POAs se différencient par la méthode utilisée pour la production de radicaux hydroxyles (chimique, photochimique, catalytique) et la concentration en

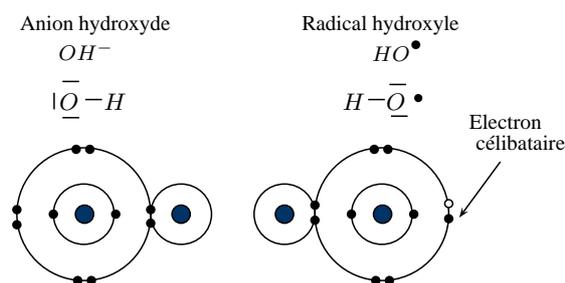
radicaux produits. Les POAs peuvent être basés sur l'ozone (O_3) ou l'ozone et le peroxyde d'hydrogène (O_3/H_2O_2); les radiations UV et l'ozone (UV/ O_3); les radiations UV et le peroxyde d'hydrogène (UV/ H_2O_2); ou encore les radiations UV, l'ozone et le peroxyde d'hydrogène (UV/ O_3/H_2O_2), l'ozone et un catalyseur, le système peroxyde d'hydrogène - fer (Fenton),... (American Water Works Association and American Society of Civil Engineers (2004)). On peut constater que parmi les méthodes utilisées dans les POAs, l'ozone joue souvent un rôle important. Il produit lors de sa décomposition les radicaux réactifs recensés dans le Tableau 1.1 où le radical hydroxyle est le plus important.

TABLE 1.1 – Principales entités radicalaires générées lors de la décomposition de l'ozone et réactivité relative vis-à-vis de la matière organique (Doré (1989))

Entité	Nom	Réactivité relative
OH^\bullet	Radical hydroxyle	Très réactif
HO_2^\bullet	Radical hydroperoxyde	Peu réactif
$O_2^{\bullet-}$	Ion Radical superoxyde	Peu réactif
$O_3^{\bullet-}$	Ion Radical ozonide	Très peu réactif

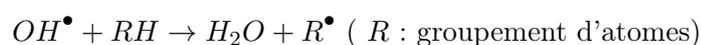
1.3.1.1 Réactivité et mécanisme d'action des radicaux OH^\bullet

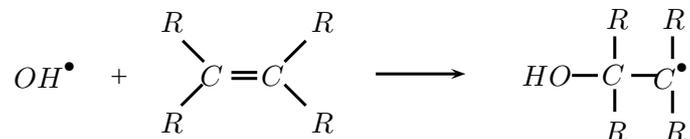
Le radical hydroxyle OH^\bullet est la forme neutre de l'anion hydroxyde.



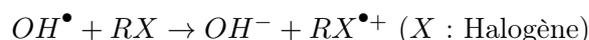
C'est un oxydant très réactif mais peu sélectif. La réaction du radical OH^\bullet sur les composés organiques et minéraux peut se faire selon les trois modes suivants :

- L'arrachement d'un atome d'hydrogène





- L'addition du radical au composé pour former un radical organique
- Le transfert d'électron



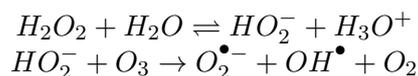
Dans ce mode, le radical hydroxyle est réduit en anion hydroxyde par un substrat organique. Ce type de réaction est possible lorsque les réactions d'arrachement d'un atome d'hydrogène ou d'addition électrophile sont empêchées par un encombrement stérique ou par la présence de plusieurs substitutions halogénées (Legrini *et al.* (1993)).

La recombinaison radical-radical n'a généralement pas lieu en présence d'ozone (Bui (2009)).

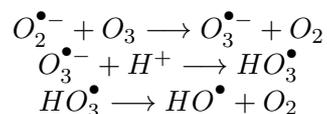
1.3.1.2 Couplage O_3/H_2O_2

Le peroxyde d'hydrogène a pour rôle de décomposer l'ozone en espèces radicalaires très réactives et peu sélectives. Ces radicaux permettent une bonne efficacité du système en termes d'oxydation des composés organiques en comparaison de l'action directe de l'ozone sur ces mêmes composés (Hoang (2009)).

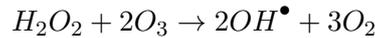
L'influence du peroxyde d'hydrogène sur la décomposition d'ozone est négligeable pour de faibles valeurs de pH. Au-delà d'une valeur de pH de 6, la décomposition s'accélère fortement car la concentration de l'anion HO_2^- dissocié du peroxyde, qui réagit avec l'ozone pour former des radicaux hydroxyle et superoxyde $O_2^{\bullet-}$, augmente quand le pH augmente.



L'anion radical $O_2^{\bullet-}$ a pour rôle d'induire la décomposition de l'ozone et de conduire à la formation de radicaux hydroxyles OH^\bullet .



La réaction globale de la décomposition de l'ozone par le peroxyde d'hydrogène est la suivante :

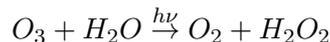


Le taux de transformation de l'ozone en radicaux hydroxyles dépend de plusieurs facteurs :

- la concentration initiale du peroxyde d'hydrogène ;
- le pH ;
- la libération de l'anion radical superoxyde ($O_2^{\bullet-}$) par les substrats organiques (promoteurs) oxydés par le radical hydroxyle ;
- la vitesse à laquelle les radicaux hydroxyles seront consommés par les solutés organiques (inhibiteurs) ne conduisant pas à la libération de radicaux $O_2^{\bullet-}$ (Bui (2009)).

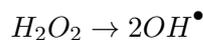
1.3.1.3 Couplage UV/ O_3

L'ozone en solution aqueuse absorbe les radiations UV avec un maximum d'absorption à la longueur d'onde de 253.7 nm (Zaviska *et al.* (2009)). La photolyse de l'ozone conduit à former le peroxyde d'hydrogène selon la réaction suivante (Bui (2009)) :

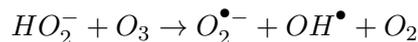


La formation des radicaux hydroxyles se fait ensuite selon deux voies :

- par photolyse directe du peroxyde d'hydrogène :



- par réaction entre l'ozone et H_2O_2 :



1.3.2 Problème d'optimisation des POAs

Les POAs présentent de bonnes performances de traitement. La principale limite de ces procédés réside dans le coût de fonctionnement élevé lié aux réactifs et/ou aux besoins énergétiques pour produire les entités radicalaires.

1.4 Formulation du problème

Un problème rencontré dans toutes les stations de traitement des eaux réside dans le coût de fonctionnement élevé pour atteindre les objectifs spécifiés du traitement. Les stations basées sur les POAs et en particulier sur le procédé d'ozonation, fonctionnent généralement en boucle ouverte. Il n'y a pas de contrôle sur ces procédés pour atteindre les objectifs spécifiés avec un coût moins élevé.

Aujourd'hui, les installations industrielles de procédé d'ozonation sont souvent surdimensionnées de plus de 20 % pour faire face à la variabilité de l'effluent à traiter, ce qui impacte le coût d'investissement (capacité de production de l'ozoneur, l'appareil qui génère l'ozone à partir de l'oxygène). Quant au coût de fonctionnement (puissance électrique nécessaire à la production d'ozone, consommation excessive d'oxygène), les pertes sont aussi très importantes car parfois, lorsque l'effluent est peu chargé en polluant, plus de 95 % de l'ozone produit se retrouve dans les événements du réacteur (surproduction d'ozone), alors que quelques pourcents auraient suffi pour assurer un traitement efficace (Pontlevoy (2012)). Il devient donc indispensable de contrôler le procédé afin de réaliser des économies substantielles.

Plus généralement, afin de rendre plus attractifs les POAs et de faciliter leur implantation industrielle, il est important d'optimiser ces procédés en développant une boucle de régulation. Dans le cadre de ce mémoire, le procédé considéré est un pilote d'ozonation catalytique, mais l'approche peut être appliquée à d'autres procédés. L'objectif est de construire des lois de commande permettant de diminuer la quantité d'oxygène consommée, ainsi que la puissance appliquée sur l'ozoneur tout en limitant l'ozone inutilisé qui est évacué dans les événements du réacteur.

La première difficulté rencontrée est la mesure en ligne d'un paramètre permettant de quantifier l'abattement du polluant à traiter. L'indicateur de DCO est couramment utilisé, cependant les capteurs de DCO en continu sont coûteux et/ou nécessitent une maintenance régulière coûteuse. Dans l'application sur le pilote d'ozonation catalytique, la solution offerte par un spectrophotomètre de la mesure en ligne de l'absorbance UV-visible est retenue comme une grandeur corrélée avec la DCO, et donc comme un indicateur de la pollution de l'eau traitée ou à traiter.

Le second problème est trivial dans l'approche système de l'automatique. L'étape d'identification du système permet d'obtenir une connaissance sur le procédé et sa dynamique à travers un modèle mathématique. L'étape de synthèse de la commande consiste à déterminer le correcteur utilisé dans la boucle de régulation.

1.5 Le procédé d'ozonation catalytique

1.5.1 Ozonation

L'ozone est un gaz formé industriellement à partir de dioxygène soumis à une décharge électrique. L'équation montrant cette formation s'écrit (Doré (1989))



Pour former une mole d'ozone, l'énergie nécessaire est théoriquement égale à 142.12 kJ, mais le rendement énergétique est seulement de 5% dans les procédés industriels.

La solubilité de l'ozone est fonction de la température de l'eau et de la pression partielle de l'ozone. Pour avoir une solubilité élevée, il est important que la température soit basse et que le pourcentage massique en ozone dans le gaz soit important.

L'ozone est un oxydant très important pour la désinfection (voir paragraphe 1.2.4.4). Il peut également oxyder de nombreux composés minéraux (Fe^{2+} , Mn^{2+} , NO_2^- , Br^- , ClO^- , ClO_2^- , etc.) et organiques (matières organiques naturelles, polluants d'origine anthropiques et micropolluants organiques) avec une vitesse parfois très élevée, surtout en milieu neutre et basique (Hoang (2009); Hoigné et Bader (1983); Hoigné *et al.* (1985)).

Les réactions d'ozonation peuvent être classées en trois types :

- les réactions directes où l'ozone moléculaire réagit avec la molécule dissoute (M),
- les réactions indirectes où l'entité radicalaire, résultant de la décomposition d'ozone, en particulier le radical hydroxyle, réagit avec la molécule (M) où l'initiateur de cette décomposition peut être le peroxyde d'hydrogène, la photolyse par les radiations UV ou l'anion hydroxyde OH^- ,
- les réactions induites par des sous-produits de l'oxydation (Bui (2009)).

La figure 1.1 montre les différents modes d'interaction de l'ozone en solution aqueuse d'après Hoigné et Bader (1983).

1.5.2 Ozonation catalytique

L'ozonation catalytique est considérée comme une technologie d'oxydation avancée. Selon la littérature, il y a deux groupes dans la classification de l'ozonation catalytique : l'activation d'ozone par des ions métalliques en solution (catalyse homogène) et l'ozonation catalytique hétérogène en présence d'oxydes métalliques ou de métaux supportés.

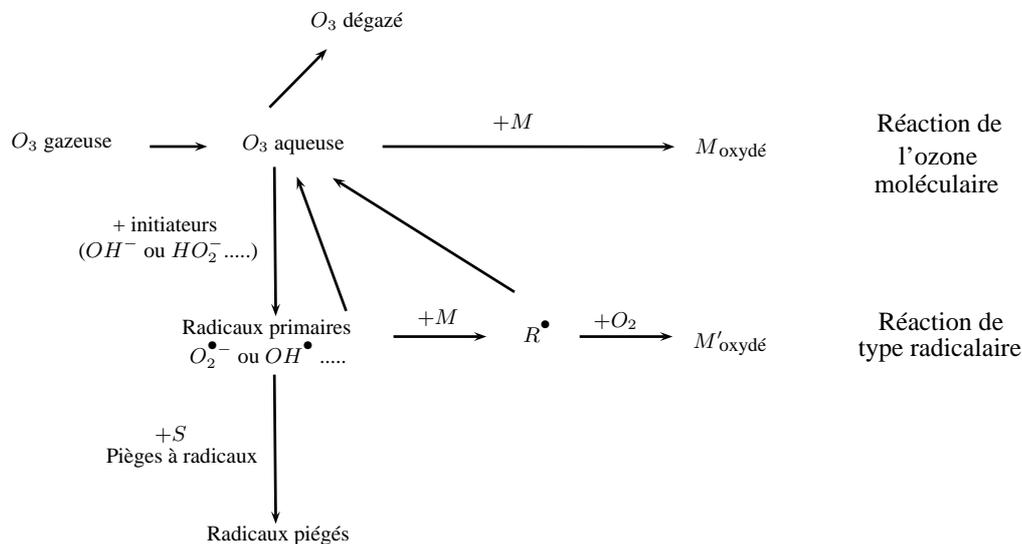


FIGURE 1.1 – Différents modes d'interaction de l'ozone en solution aqueuse

1.5.2.1 Ozonation catalytique homogène

Des travaux de recherche sur l'activation d'ozone par les métaux ont été réalisés par Hewes et Davinson (1972). Ils ont montré que la présence de métaux comme *Fe(II)*, *Mn(II)* ou *Co(II)* dans la solution soumise à l'oxydation a un rôle très important qui permet d'augmenter la minéralisation des composés organiques. C'est la catalyse homogène. Par exemple, Andreozzi *et al.* (1992) montrent que *Mn(II)* peut accélérer l'oxydation de l'acide oxalique en milieu acide par le fait qu'un complexe formé entre l'acide oxalique et *Mn(III)* forme un produit intermédiaire plus facile à oxyder par l'ozone.

1.5.2.2 Ozonation catalytique hétérogène

En ozonation catalytique hétérogène, le catalyseur est solide et les réactions se produisent sur la surface spécifique du catalyseur. Ce qui incite à chercher toujours un catalyseur très poreux pour un traitement plus efficace.

De nombreux travaux de recherche ont porté sur l'ozonation catalytique. Citons, par exemple, les travaux de Al-Hayek *et al.* (1989) appliqués à l'ozonation catalytique du phénol en utilisant le catalyseur *Fe(III)/Al₂O₃*, ou encore ceux de Bhat et Gurol (1995) sur l'ozonation catalytique du chlorobenzène. Karpel Vel Leiner *et al.* (1999) ont étudié l'efficacité d'un catalyseur à base de *Cu* sur des essais en batch pour plusieurs composés organiques. Ces auteurs et d'autres ont montré que

l'ozonation catalytique hétérogène améliore significativement l'oxydation de nombreuses molécules organiques en comparaison de l'ozonation seule.

Deux hypothèses sont proposées par Legube et Karpel Vel Leitner (1999) sur le mécanisme de l'ozonation catalytique :

- Le catalyseur a un rôle d'adsorbant, l'ozone et le radical hydroxyle OH^\bullet sont les oxydants. Le catalyseur adsorbe sur ses positions hydroxylées ($\equiv Me - OH$) le composé organique symbolisé par AH formant un complexe de surface ($\equiv Me - A$). L'ozone et le radical OH^\bullet , qui sont plus concentrés à la surface du catalyseur qu'au sein de la phase aqueuse, oxydent le complexe ($\equiv Me - A$) donnant des sous-produits adsorbés ($\equiv Me - P$) et ($\equiv Me - R$) et des sous-produits finaux désorbés (P', R') au sein de la phase aqueuse.
- L'ozone réagit sur les sites métalliques du catalyseur ($\equiv Me_{Red} \rightarrow \equiv Me_{ox}$) formant simultanément les radicaux OH^\bullet . Le composé organique AH s'adsorbe sur le catalyseur oxydé ($\equiv Me_{ox}$) donnant le complexe ($\equiv Me_{ox} - A$) qui est oxydé par transfert d'électrons ($\equiv Me_{ox} - A \rightarrow \equiv Me_{ox} - A^\bullet$). Puis les espèces radicales A^\bullet sont facilement désorbées pour être oxydées encore par l'ozone et les radicaux OH^\bullet au sein de la phase aqueuse (Hoang (2009)).

Dans ce mémoire, le procédé considéré est basé sur l'ozonation catalytique hétérogène décrite précédemment (Legube et Karpel Vel Leitner (1999); Karpel Vel Leiner *et al.* (1999); Pontlevoy *et al.* (2003)).

1.5.3 Principe du procédé

Les réacteurs triphasiques à catalyseur hétérogène, lit fixe et écoulement co-courant ascendant sont souvent utilisés en industrie. Cependant, avec cette configuration, le catalyseur subit une forte attrition. Pour palier ce problème, les réacteurs à écoulement contre-courant peuvent être préférés. Dans tous les cas, pour les réacteurs à lit fixe, il faut que la dimension du catalyseur soit plus importante que celle admise dans les réacteurs à lits fluidisés. Or, il est montré dans (Pontlevoy *et al.* (2003)) que le fait d'augmenter la taille des particules de catalyseur influence négativement l'activité d'oxydation catalytique du procédé. Pour ces raisons, un catalyseur de granulométrie très fine (inférieure à 200 nm) dans un lit fluidisé a été choisi dans ce procédé. La réaction se fait à température et pression ambiantes.

Le système considéré dans ce mémoire est présenté sur la figure 1.2. Il est constitué de deux éléments majeurs :

- Le réacteur avec un agitateur mécanique. Il contient le catalyseur en poudre en suspension.
- Le système de diffusion d'ozone. L'ozone est généré *in situ* à partir du dioxygène soumis à une décharge électrique générée dans l'ozoneur.

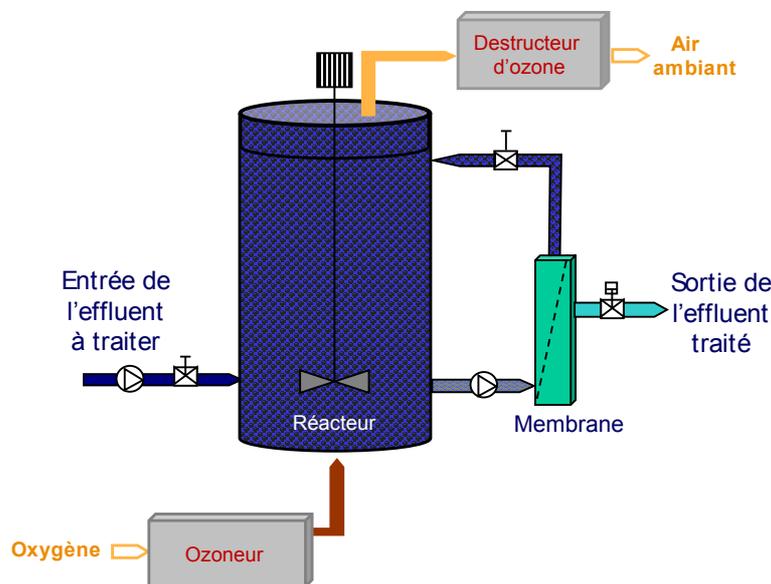


FIGURE 1.2 – Schéma de principe du pilote

Une boucle de recirculation avec un module membranaire permet de séparer le catalyseur de l'effluent traité et de le conserver dans le réacteur. L'expérience acquise (Pontlevoy *et al.* (2003)) permet de fixer les valeurs de différents paramètres tels que la concentration en catalyseur.

La production d'ozone et le débit d'effluent à traiter sont les deux principaux paramètres à régler pendant le traitement, et donc à adapter aux variations de concentration du polluant. Ces deux paramètres peuvent être les actionneurs de commande dans une boucle de régulation.

Le catalyseur conserve sa structure et son efficacité de traitement dans la durée. De plus, les molécules inorganiques, qui peuvent être présentes en solution, n'influencent pas l'activité du catalyseur. Généralement, la fréquence de remplacement du catalyseur peut aller de 6 à 24 mois selon les caractéristiques chimiques et le débit de l'effluent (Pontlevoy *et al.* (2003)).

1.5.4 Mécanisme d'action

Le catalyseur améliore la cinétique des réactions d'ozonation. Son intervention dans l'oxydation des matières organiques se fait principalement sur sa surface, ce qui a pour effet d'accélérer la cinétique par rapport à une action directe de l'ozone. Il peut aussi permettre d'oxyder des molécules peu oxydables par l'ozone seul. Par conséquent, le procédé d'ozonation catalytique considéré peut améliorer l'abattement de la DCO d'au moins 15 % par rapport à un traitement conventionnel et

- le module membranaire de recirculation (avec la pompe de recirculation PC),
- le réacteur de contact (d'un volume de 16 litres auxquels se rajoutent 3 litres de solution dans la boucle de recirculation),
- le circuit d'ozone gaz,
- une cuve pour recueillir l'effluent après traitement (une mesure d'absorbance UV-visible est réalisée en continu en sortie de traitement).

Une vanne de purge (V1) est présente sous le réacteur.

Le module membranaire de recirculation est composé :

- d'un filtre (constitué d'une membrane céramique de microfiltration) pour récupérer le catalyseur en poudre,
- d'une boucle de retour des eaux à traiter pour le conserver dans le réacteur.

Le circuit d'ozone est composé :

- de l'ozoneur à oxygène (alimentation par un manomètre mural),
- du destructeur d'ozone,
- de l'analyseur d'ozone gaz.

L'introduction du gaz ozoné est effectué au moyen d'un tube en PVC percé d'une dizaine de trous millimétriques en fond de réacteur. La dose de catalyseur est exprimée en masse par rapport au volume de solution dans le réacteur (19 litres).

1.5.6 Effluents à traiter

L'effluent, utilisé pour faire les premiers essais, est une solution organique synthétique, le paranitrophénol. Cette molécule organique modèle est représentative des matières organiques présentes dans les eaux industrielles. Le paranitrophénol, de formule moléculaire $C_6H_5NO_3$, est un composé phénolique qui a un groupe nitro à l'opposé du groupe hydroxyle sur le cycle benzénique (Figure 1.4).

Sa solubilité dans l'eau à 25 °C est de 12.4 g/L. Sa solution est de couleur jaune vif en milieu basique et incolore en milieu acide. Des mesures de sécurité doivent être prises dans sa manipulation (port de lunettes, de gants, ...), car ce produit est toxique et irritant pour la peau et les yeux.

D'autres effluents ont été testés comme l'acide humique (Abouzlam (2009)) ou plus récemment des eaux industrielles issues d'un procédé biologique (pollution organique réfractaire), mais ces expérimentations ne sont pas fournies dans ce mémoire de thèse.

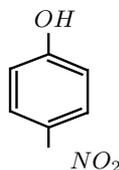


FIGURE 1.4 – Paranitrophénol

1.6 Instrumentation du pilote

1.6.1 Ozone dans les événements

L'ozone produit par l'ozoneur est envoyé dans le réacteur pour oxyder les molécules organiques présents dans l'effluent. Une partie de l'ozone sort dans les événements du réacteur sans aucune réaction. Cette partie non consommée dans la réaction est envoyée ensuite vers le destructeur (four à 475 °C) pour être détruite.

La concentration d'ozone dans les événements est souvent élevée. Cette surproduction d'ozone pose un problème économique. D'une part, sa production et sa destruction représentent un coût en consommation d'énergie électrique. D'autre part, et c'est là l'essentiel du coût de fonctionnement du procédé, la consommation inutile d'oxygène pur nécessaire à la production de l'ozone représente un frein au développement industriel de cette technologie. Un de nos objectifs est de minimiser la concentration de l'ozone dans les événements tout en atteignant les objectifs de qualité de rejets spécifiés pour réduire le coût de fonctionnement. Pour atteindre cet objectif, une mesure en ligne de la concentration d'ozone dans les événements est mise en place, et est intégrée dans la boucle de régulation.

- Capteur utilisé

La mesure de la concentration de l'ozone dans les événements est donnée par un analyseur d'ozone (marque BMT 964 BT, gamme de mesure [0 – 200 g/Nm³], sortie analogique [0 – 10 V]). Cet appareil est couplé avec un petit destructeur pour détruire l'ozone en sortie d'analyseur.

- Principe de fonctionnement

L'analyseur est un photomètre UV (254 nm) à deux faisceaux, équipé d'un microprocesseur pour la mesure de la concentration d'ozone dans l'échantillon de gaz. Pour réaliser le calcul de cette concentration, l'analyseur mesure l'intensité UV dans la voie de référence et l'intensité UV dans la voie de mesure, ainsi que la température et la pression du gaz dans la cellule de mesure. La figure 1.5 montre la circulation de l'ozone dans ce système d'analyse composé de l'analyseur, proprement dit, d'un sécheur en amont et d'un destructeur.

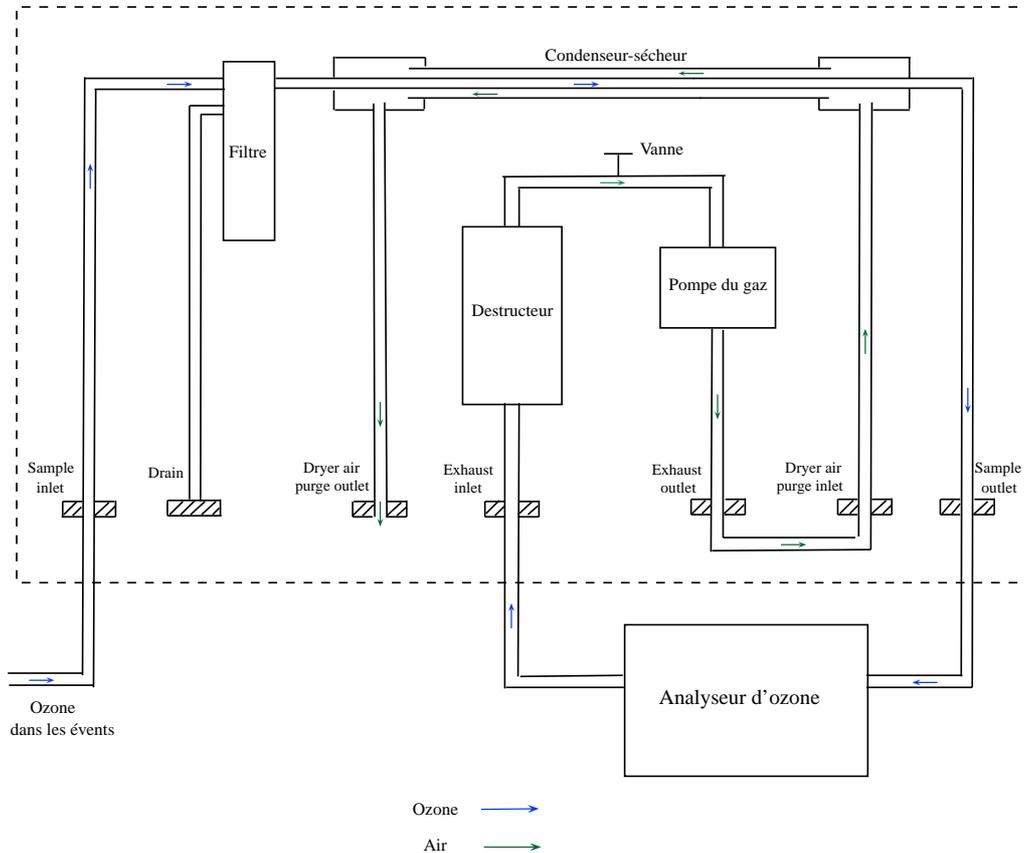


FIGURE 1.5 – Système d'analyse de l'ozone dans les événements

La calibration de l'analyseur avec l'oxygène est indispensable avant de faire passer de l'ozone pour la mesure de concentration.

Le débit de l'ozone dans le capteur est de 0.5 L/min . Le gaz passe tout d'abord dans un filtre pour supprimer les impuretés, puis dans un condenseur pour le sécher, avant de passer dans l'analyseur pour la mesure de concentration. L'ozone en sortie de l'analyseur est détruit.

1.6.2 Indicateur d'abattement du polluant

La DCO est couramment utilisée pour représenter la concentration en polluant. Malheureusement, il est difficile de mettre en oeuvre une mesure de DCO en continu aussi bien pour des raisons de coût d'investissement que pour des raisons de coût de fonctionnement engendré par l'entretien. Un autre indicateur corrélé avec la DCO, et par conséquent avec la concentration de polluant, doit être instrumenté. Dans ce mémoire, la mesure en ligne de l'absorbance donnée par un spectrophotomètre UV-

visible permet le suivi de la concentration en polluant de l'effluent traité. D'après Edzwald *et al.* (1985), l'absorbance offre une bonne corrélation avec la DCO.

1.6.2.1 Absorbance UV-visible

Si un flux monochromatique (correspondant à une certaine longueur d'onde) d'intensité I_o (flux incident) pénètre un milieu homogène en suivant un certain trajet optique, il sera observé, à la sortie du milieu, une intensité I_t (flux transmis) de moindre valeur. L'absorbance est le logarithme décimal du rapport de ces intensités (Harvey (1999)) et est définie par

$$A = \log_{10}\left(\frac{I_o}{I_t}\right)$$

Par exemple, si $A = 1$ alors $\frac{I_o}{I_t} = 10$ et donc 90 % du flux est absorbé ; si $A = 2$ alors $\frac{I_o}{I_t} = 100$ et donc 99 % du flux est absorbé.

L'absorbance dépend de la longueur du chemin optique, de la longueur d'onde du flux monochromatique λ et du milieu pénétré. Plus le milieu est pollué, plus l'absorbance est élevée. C'est ce lien absorbance-concentration de polluant qui est exploité dans cette application.

Plus le trajet optique est long, plus l'absorbance est élevée. La valeur du trajet doit être choisie selon l'importance de la concentration de polluant. Par exemple, si $A = 2$ avec un trajet optique de 10 mm pour un certain milieu dilué 10 fois, alors la valeur de l'absorbance A est égale à 20 avec le même trajet optique (10 mm) mais sans diluer le milieu mesuré. Par contre, ce milieu non dilué peut avoir une valeur de l'absorbance égale à 2 mais avec un trajet optique égale à 1 mm. Pour la plupart des spectrophotomètres, où l'absorbance maximale mesurée est voisine de la valeur de 2, il est nécessaire d'utiliser une cellule d'échantillon d'un trajet optique de 1 mm si le milieu est très pollué (son absorbance avec le trajet optique de 10 mm dépasse la valeur 2). De plus dans les conditions expérimentales de cette étude, il est difficile de diluer l'échantillon dans un dispositif de mesure en continu.

1.6.2.2 Choix de la longueur d'onde

La mesure de l'absorbance est réalisée sur l'effluent traité, à la sortie du module membranaire après filtration. Il est important de noter que l'absorbance de l'ozone pour certaines longueurs d'onde est importante. Or, l'ozone, présent dans la phase aqueuse pendant l'opération d'ozonation, peut être encore présent dans l'eau traitée lors de la mesure. Il faut donc trouver une longueur d'onde pour laquelle l'ozone n'ait aucune influence sur l'absorbance mesurée.

Un essai en réacteur fermé a été réalisé sur une solution aqueuse de paranitrophénol ($DCO = 100\text{mg/L}$) soumise à l'ozonation dans un réacteur d'un litre avec une quantité d'ozone introduite d'environ 2 g/L . Les spectres d'absorbance avec un trajet optique de 10 mm ont été mesurés sur un échantillon prélevé après 75 minutes d'ozonation et sur le même échantillon mais après dégazage. Ces deux spectres sont tracés sur la figure 1.6 pour une longueur d'onde comprise entre 210 et 360 nm . Pour une longueur d'onde inférieure à 320 nm , l'ozone dissous contribue significativement à l'absorbance en comparaison avec l'absorbance due aux composés organiques. Par contre, autour d'une longueur d'onde de 340 nm , les échantillons non-dégazé et dégazé présentent la même absorbance. La contribution de l'ozone sur l'absorbance à 340 nm est donc négligeable par rapport à l'absorbance due aux composés organiques de l'effluent ozoné. C'est cette longueur d'onde qui est retenue pour la mesure en continu de l'absorbance.

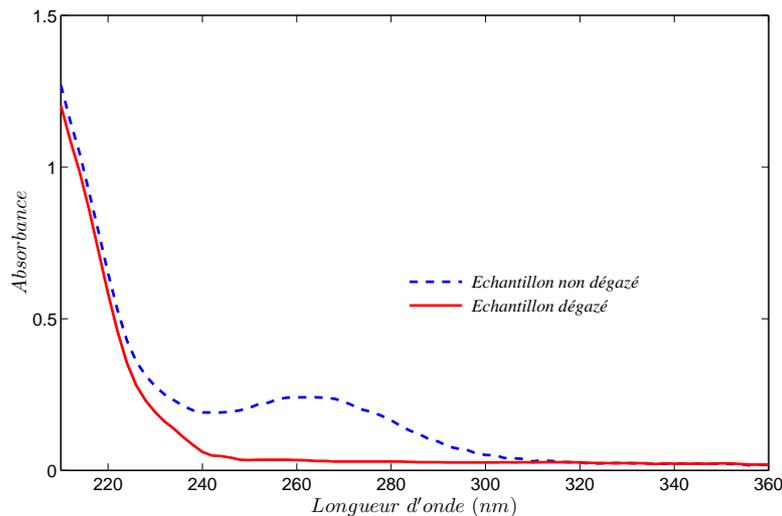
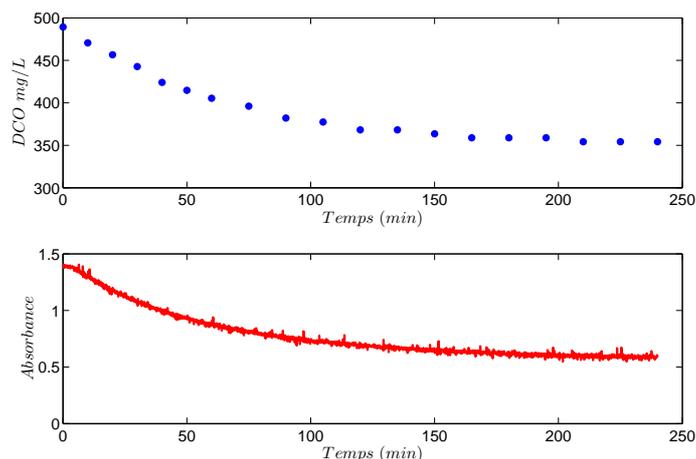


FIGURE 1.6 – Spectres d'absorbance d'une solution de paranitrophénol (DCO initiale = 100 mg/L) après un contact de 75 minutes avec l'ozone

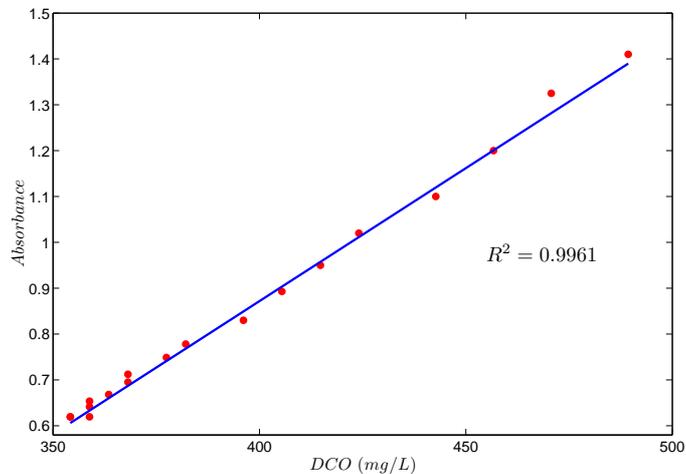
1.6.2.3 Corrélation entre l'absorbance et la DCO

La mesure de la DCO donne une bonne indication sur la pollution organique présente dans l'effluent, et est souvent utilisée dans les stations de traitement des eaux usées. Cependant, le surcoût engendré par un équipement de mesure en ligne de la DCO n'est pas envisageable dans cette étude sur les installations d'ozonation catalytique. Un essai avec le pilote a été réalisé pour évaluer la corrélation entre l'absorbance et la DCO avec les conditions expérimentales suivantes : une concentration en paranitrophénol en entrée de 310 mg/L soit de 500 mg/L exprimée en

DCO, un échelon de puissance de 110 W sur l'ozoneur correspondant à 97 g/Nm^3 d'ozone, un débit de gaz de 57 L/h et un débit d'eau traitée égal à 25 L/h .



(a)



(b)

FIGURE 1.7 – Corrélation entre DCO et absorbance. Puissance de l'ozoneur : 110 W, production d'ozone : 97 g/Nm^3 , DCO du produit à traiter : 500 mg/L , débit : 25 L/h , absorbance mesurée à la longueur d'onde : 340 nm .

Des mesures ponctuelles de la DCO (sur des prélèvements effectués toutes les 10 minutes) et la mesure en ligne de l'absorbance à une longueur d'onde de 340 nm ont été réalisées pendant 240 minutes. Ces mesures sont présentées sur la figure 1.7.

La corrélation entre ces deux grandeurs est significative. La figure 1.7-b montre une relation linéaire entre l'absorbance et la DCO. Il est ainsi possible de déduire, dans ces conditions opératoires, la valeur de la DCO à partir de la mesure de l'absorbance.

Ainsi il est donc également possible de déterminer l'abattement de la pollution par le traitement. Par exemple, pour une concentration initiale en paranitrophénol de 500 mg/L de DCO, on constate que lorsque l'absorbance de l'eau traitée est d'environ 0.5, alors l'abattement de DCO obtenu est d'environ 30 %.

Sur le pilote d'ozonation, la mesure de l'absorbance est réalisée avec un spectrophotomètre (Jenway 6315, sortie analogique $[0 - 10 \text{ V}]$) et une cellule de mesure en quartz, un trajet optique de 1 mm et une prise continue d'échantillon d'eau traitée. Le principe de son fonctionnement, décrit sur la figure 1.8, est basé sur une source de lumière qui fournit un faisceau lumineux polychromatique de gamme de longueur d'onde $[198 - 1000 \text{ nm}]$. Un monochromateur permet alors d'envoyer un rayon monochromatique à une certaine longueur d'onde vers la cellule de mesure dans laquelle l'eau traitée circule en continu, entraînée par une pompe péristaltique. Le signal optique, qui traverse la cellule, est reçu par un détecteur qui le transforme en signal électrique. L'absorbance est calculée par un microprocesseur.

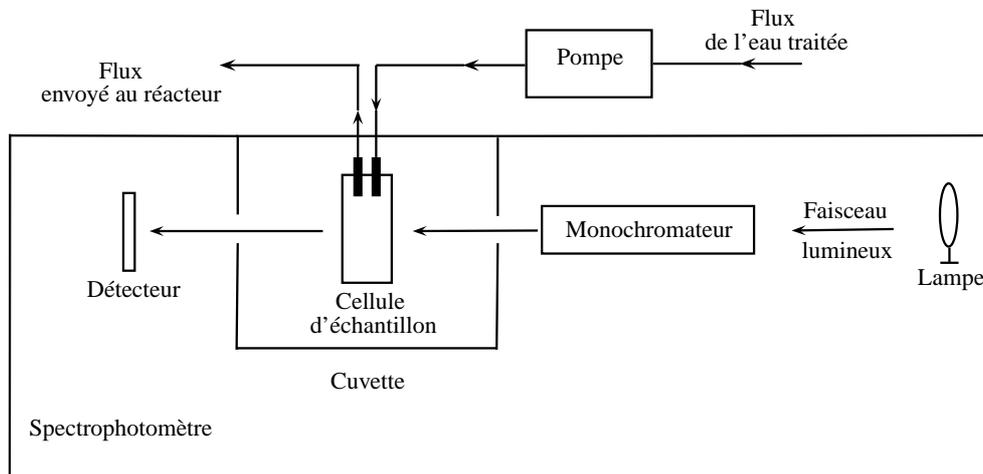


FIGURE 1.8 – Capteur d'absorbance

Une calibration sur la même longueur d'onde doit être réalisée avant de mesurer l'absorbance de l'effluent. Cette calibration est faite avec un échantillon de référence, c'est-à-dire un échantillon d'eau pure.

1.6.3 Système d'acquisition

Le pilote est équipé d'un système d'acquisition (xPC Target) permettant l'acquisition de données et le prototypage rapide des algorithmes de commande. Ce système, composé d'un PC hôte et d'un PC cible, permet facilement d'exécuter les schémas Simulink (MathWorks). La figure 1.9 représente un schéma contenant les liens entre Simulink et le pilote. Le PC cible est équipé d'une carte d'acquisition PCI-MOI-16E-4. Les convertisseurs analogiques-numériques (CAN) permettent l'acquisition des mesures d'absorbance et de concentration d'ozone dans les événements, alors qu'un convertisseur numérique-analogique (CNA) assure l'envoi de la commande $0 - 10 V$ à l'ozoneur. Les ports out1, out2 et out3 représentent les données qui sont conservées dans l'espace de travail Matlab (MathWorks). Ce sont, respectivement, les valeurs de la commande, les mesures de l'ozone dans les événements et de l'absorbance en Volts.

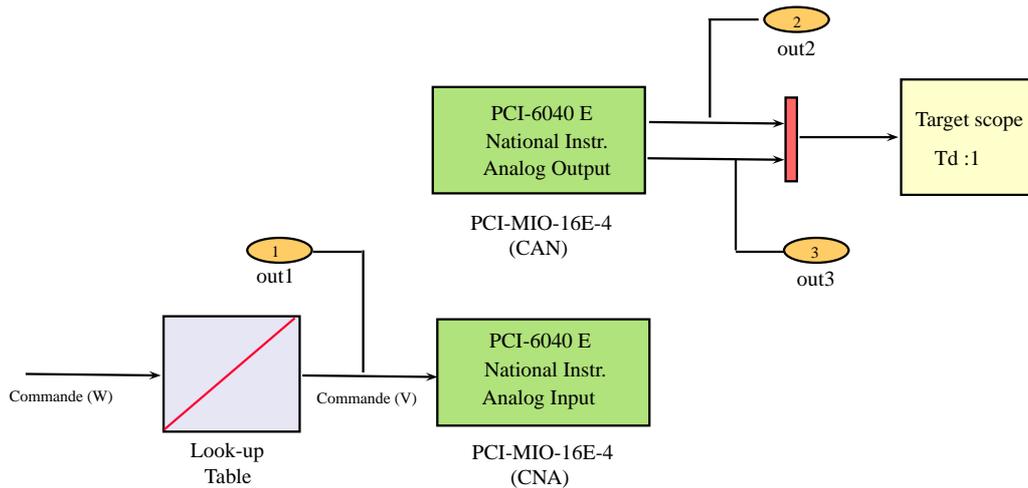


FIGURE 1.9 – Schéma Simulink - XPC Target

Le signal de commande de l'ozoneur généré par la carte d'acquisition est une tension $[0 - 10 V]$. Cependant, l'ozoneur est contrôlable par un signal en intensité $[4 - 20 mA]$. Une interface électronique située sur le PC cible et le pilote permet la conversion tension-courant de la commande.

L'ozoneur présente sur son entrée de commande des zones d'insensibilité, c'est-à-dire de petites zones où la commande peut varier sans modifier la production d'ozone. Par exemple, pour les deux tensions $1.9 V$ et $2 V$, la même puissance effective est obtenue sur l'ozoneur, et donc la même production d'ozone est fournie au pilote. Pour résoudre ce problème, la commande calculée correspond à la puissance en entrée de l'ozoneur, et un bloc Look-up table permet de faire disparaître

cette non-linéarité en réalisant une conversion commande en puissance-commande en tension. Le bloc Look-up table a été construit à partir d'un enregistrement tension-puissance pour des valeurs de tension entre 0 et 10 V avec un intervalle de 0.05 V .

Les capteurs d'ozone et d'absorbance fournissent des mesures en $[0 - 10 V]$.

1.7 Méthodologie appliquée

Pour optimiser le procédé d'ozonation catalytique, la méthodologie décrite ci-dessous a été adoptée.

1.7.1 Définition des entrées-sorties du système

La première étape est de considérer le procédé comme un système présentant des entrées et des sorties. Pour le pilote d'ozonation catalytique, les entrées et les sorties disponibles sont présentées sur la figure 1.10.

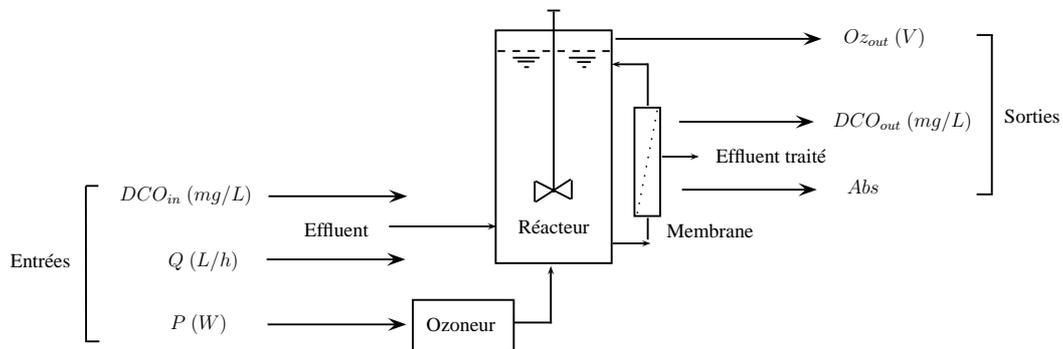


FIGURE 1.10 – Entrées et sorties du pilote d'ozonation catalytique

Les entrées du procédé sont : la puissance de l'ozoneur P (W), la demande chimique en oxygène DCO_{in} (mg/L) de l'effluent à traiter et le débit d'effluent à traiter Q (L/h). Les sorties étudiées sont : la concentration d'ozone dans les événements Oz_{out} (V), la demande chimique en oxygène DCO_{out} (mg/L) de l'effluent traité et l'absorbance de l'effluent traité Abs .

Pour la régulation du procédé, il est nécessaire d'avoir un actionneur pour agir sur la réaction et un capteur pour connaître l'avancement de la réaction. Sur le pilote, l'ozoneur est l'actionneur, et par conséquent, la commande est la puissance P de l'ozoneur. Elle peut varier sur la plage $[0 - 670 W]$. En ce qui concerne le capteur, sur cette application, l'avancement de la réaction est donné par l'absorbance

de l'effluent traité Abs fournie par un spectrophotomètre $[0 - 10 V]$. Comme il a été démontré, cette grandeur est corrélée avec la DCO_{out} qui est seulement mesurable "manuellement". Il est également intéressant de considérer la concentration d'ozone dans les événements Oz_{out} produit en excès, grandeur qu'il faut minimiser. Oz_{out} est fournie par un capteur d'ozone qui donne une tension comprise entre $[0 - 10 V]$.

Le débit d'effluent à traiter Q est une entrée constante. Quant à la DCO_{in} , cette grandeur est considérée comme une entrée de perturbation qu'il faut rejeter.

Ainsi, le procédé peut être considéré dans une approche système ; et les outils de l'automatique, identification, commande, analyse de robustesse, peuvent être appliqués à ce système.

1.7.2 Identification

La deuxième étape de cette méthodologie est l'estimation d'un modèle mathématique permettant de relier les entrées et les sorties. Cette connaissance est nécessaire pour l'étape suivante de commande. La boucle d'identification, montrée sur la figure 1.11, présente la procédure à suivre pour obtenir un modèle mathématique. Il faut tout d'abord définir le protocole expérimental, puis choisir une structure de modèle qu'il faut ensuite estimer. Une validation permet de vérifier si les objectifs sont atteints. Dans le cas contraire, un re-bouclage vers les étapes précédentes permet d'améliorer l'identification.

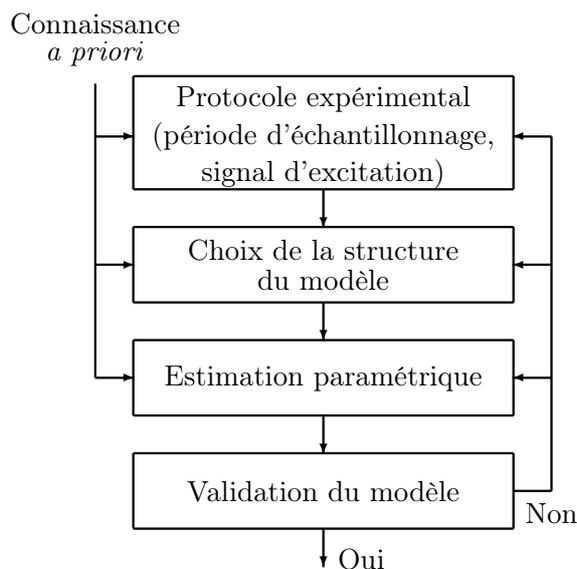


FIGURE 1.11 – La boucle d'identification de système

Dans ce travail, l'identification est envisagée avec deux objectifs : la synthèse de loi de commande et la simulation du procédé. Pour la synthèse de correcteur, il est préférable que la structure choisie soit simple. Par contre, une bonne représentation de la dynamique du système est importante. Pour la simulation, même si la structure du modèle est complexe, l'essentiel est la précision du modèle.

L'étape d'identification est bien détaillée dans le chapitre 2.

1.7.3 Synthèse de loi de commande

La synthèse d'une loi de commande consiste à déterminer un correcteur à partir de la connaissance (modèle) du système. Ce correcteur est ensuite utilisé dans une boucle de régulation représentée schématiquement sur la figure 1.12.

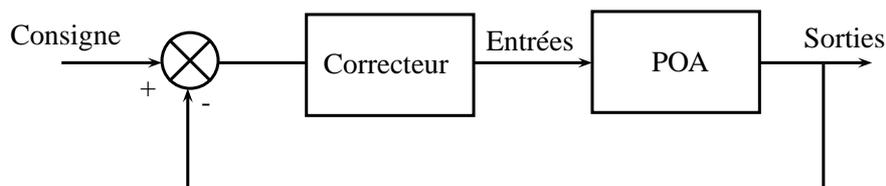


FIGURE 1.12 – Boucle de régulation

Cette étape est largement décrite dans le chapitre 3.

1.7.4 Analyse de robustesse

Pour s'assurer de la stabilité et du bon comportement du système en boucle fermée, une analyse de robustesse doit être faite. Les détails de cette étape sont également donnés dans le chapitre 3.

1.8 Conclusion

Ce chapitre introductif permet de présenter l'ozonation catalytique et sa place dans le domaine du traitement des eaux.

Le problème, traité dans ce mémoire de thèse, consiste donc à optimiser le procédé d'ozonation catalytique en développant une boucle de régulation. L'objectif est de réduire les coûts de fonctionnement pour faciliter le transfert technologique de ce procédé de traitement vers les applications industrielles.

L'instrumentation du pilote permet de considérer ce procédé comme un système présentant des entrées et des sorties comme le montre la figure 1.13.

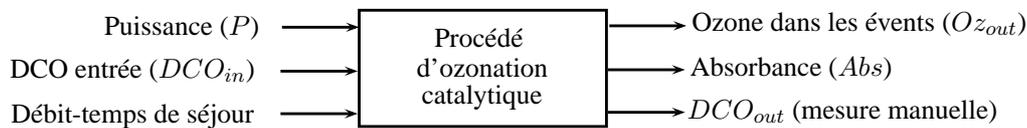


FIGURE 1.13 – Le pilote en termes d'entrées et de sorties

Dans ce travail de thèse, le débit de l'effluent traité est constant à 25 L/h et la DCO_{in} de l'effluent à traiter est une entrée de perturbation à rejeter. Par conséquent, le procédé est vu comme un système avec une entrée, la puissance de l'ozonneur, et deux sorties, la concentration d'ozone dans les événements Oz_{out} et l'absorbance de l'effluent traitée Abs ; cette dernière est considérée comme un indicateur de la concentration en polluant.

IDENTIFICATION DU PROCÉDÉ

2.1 Introduction et objectifs

L'identification a pour objectif la modélisation et l'estimation paramétrique (Landau (1988); Ljung (1999); Soderstorm et Stoica (1989)). La modélisation est un processus essentiel dans tous les domaines scientifiques (physiques, chimiques, économiques, etc.). Elle consiste à construire un modèle mathématique qui peut décrire le comportement dynamique et statique du système. L'estimation paramétrique consiste à estimer les paramètres du modèle à partir de données d'entrée et de sortie. La bonne représentation du système par le modèle doit être jugée relativement à l'utilisation faite du modèle. La connaissance et la prédiction du comportement du système permettent, par exemple, de développer un correcteur pour contrôler le système. Le développement d'un simulateur est un autre exemple d'utilisation qui peut nécessiter un modèle plus précis.

Les modèles considérés peuvent être classés en trois catégories :

- Le modèle boîte blanche : il est construit à partir des principes scientifiques basiques (physiques, chimiques, biologiques, économiques, etc.). Les équations et les paramètres peuvent être déterminés par la modélisation théorique. De plus, les paramètres ont une interprétation physique. Typiquement, les modèles, dont la structure est obtenue par les principes scientifiques, sont classés dans cette catégorie même si quelques paramètres sont estimés à partir des données de mesure.
- Le modèle boîte noire : on utilise ce modèle quand le système est complexe et mal connu, ou encore quand l'interprétation physique du système n'est pas nécessaire. Ce modèle se limite seulement à représenter le comportement des sorties du système générées par les entrées, sans s'intéresser à la connaissance sur la physique interne du système. Les paramètres du modèle n'ont donc pas d'interprétation physique.

- Le modèle boîte grise : ce modèle est un compromis entre les deux modèles précédents. La construction de la structure du modèle est basée sur une connaissance a priori sur la physique du système. L'importance de cette connaissance varie d'un système à l'autre, d'une application à l'autre (Sohlberg (2003)).

Le système d'ozonation catalytique étudié dans ce mémoire est complexe. Les cinétiques et les équilibres chimiques sont très difficiles à déterminer. De plus, l'objectif de régulation du procédé ne nécessite pas d'interprétation chimique ou physique. C'est pour cela que le modèle boîte noire sera préféré par la suite.

Les principales étapes à suivre en identification de système sont les suivantes :

- Acquérir des données d'entrée et de sortie du système. Une attention particulière doit être portée sur la richesse des signaux d'excitation appliqués aux entrées ; la qualité du modèle en dépend.
- Modéliser le système. La complexité et les propriétés (linéaire/non linéaire, temps discret/temps continu...) du modèle sont fixées dans cette étape. Une procédure d'estimation de la structure du système peut aider au choix d'un modèle parmi des modèles candidats.
- Appliquer les techniques d'estimation paramétrique minimisant un critère (souvent quadratique) sur l'erreur entre les sorties mesurées et les sorties simulées.
- Valider le modèle sur de nouvelles données.

Le premier objectif de cette étude est de choisir une structure linéaire pour le transfert entre la puissance P appliquée à l'ozoneur et la concentration en ozone dans les évents Oz_{out} , et pour le transfert entre la puissance P et l'absorbance de l'eau traitée Abs . Ces modèles linéaires permettront la construction des lois de commande nécessaires au contrôle du système. Ils doivent offrir une bonne représentation de la dynamique et du gain du procédé pour garantir des résultats convenables et une marge de robustesse.

Le second objectif est d'obtenir une modélisation plus précise du procédé pour permettre la simulation de celui-ci. Effectivement, un essai sur le pilote représente trois jours de travail : une journée pour préparer les produits et le pilote, une journée pour réaliser l'essai, et une journée pour nettoyer le pilote. S'ajoutent également des problèmes de disponibilité du pilote et un coût en consommable. Ce simulateur permettra de tester en simulation les lois de commande avant l'essai expérimental. Le procédé d'ozonation catalytique présente un comportement non linéaire. Dans la plage de fonctionnement du procédé, cette non-linéarité n'est pas très forte, mais elle doit être modélisée dans l'objectif de mise au point d'un simulateur pour permettre d'étudier l'effet de la non-linéarité sur la boucle de régulation. Les techniques d'identification de système non linéaire sont nombreuses (voir Haber et Keviczky

(1999a,b); Nagy *et al.* (2011); Nelles (2001); Ragot *et al.* (2001) et leurs références). Le modèle non linéaire considéré est le modèle dit de Wiener couramment utilisé en chimie (Gomez et Baeyens (2004); Kalafatis *et al.* (2005); Sung et Lee (2004)).

2.2 Description des outils utilisés

2.2.1 Les modèles

Les phénomènes chimiques mis en jeu dans une réaction telle que l'ozonation catalytique sont variés et interviennent à des échelles de temps très différentes. Il est connu depuis bien longtemps que des précautions doivent être prises dans la simulation numérique de systèmes présentant des constantes de temps éloignées ("stiff systems"), et qu'il est courant de rencontrer ce genre de problème en génie chimique (Curtiss et Hirschfelder (1952)). Comme il le sera constaté dans cette section, le rapport des constantes de temps des deux transferts Oz_{out}/P et Abs/P à estimer est supérieur à 15. La période d'acquisition des signaux de mesure doit être choisie par rapport au mode le plus rapide; ce choix fournissant un sur-échantillonnage du mode le plus lent. Dans le cas d'un sur-échantillonnage, l'identification d'un modèle à temps discret mène à des pôles très proches du cercle unité dans le domaine complexe qui provoque des difficultés statistiques dans l'estimation paramétrique (Garnier et Wang (2008)). C'est la raison pour laquelle il ne sera considéré dans cette étude que des modèles à temps continu, qui sont moins sensibles au sur-échantillonnage et adaptés aux constantes de temps éloignées.

Pour le modèle linéaire nécessaire à la synthèse de la commande, un modèle de type fonction de transfert à temps continu sera considéré. Par contre, le modèle dédié à la simulation sera un modèle non linéaire de Wiener à temps continu.

2.2.1.1 Modèle de type fonction de transfert

Le comportement linéaire statique et dynamique d'un système peut être représenté sous la forme temporelle d'une équation différentielle définie à l'ordre 1 par

$$a_1 \frac{\partial y(t)}{\partial t} + y(t) = b_0 u(t) \quad (2.1)$$

$y(t)$ est linéaire par rapport à l'entrée $u(t)$.

Si on applique la transformée de Laplace à l'équation (2.1) en considérant des conditions initiales nulles, on obtient l'équation équivalente dans le domaine de Laplace s

$$a_1 s Y(s) + Y(s) = b_0 U(s) \quad (2.2)$$

soit

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{1 + a_1 s} \quad (2.3)$$

$F(s)$ est appelée fonction de transfert à temps continu. Elle représente également la relation entre $Y(s)$ et $U(s)$ dans le domaine fréquentiel, car le variable de Laplace peut s'exprimer en fonction de la pulsation $s = j\omega$ avec $\omega = 2\pi f$ exprimée en radian par seconde, et où f est la fréquence en Hertz.

De manière générale dans ce mémoire, on note $X(s)$ la transformée de Laplace du signal temporel $x(t)$.

La fonction de transfert a la forme générale suivante

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n_b} s^{n_b}}{1 + a_1 s + \dots + a_{n_a} s^{n_a}} \quad (2.4)$$

où n_a est l'ordre du dénominateur, soit le nombre de pôles, et n_b le nombre de zéros. La fonction de transfert sera dite propre si $n_a \geq n_b$.

Pour un système présentant un retard pur τ , la fonction de transfert est donnée par

$$F(s) = e^{-\tau s} \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.5)$$

Le but de l'identification est de déterminer les ordres n_a et n_b , puis d'estimer les paramètres de la fonction de transfert, y compris le retard pur, soit le vecteur de paramètres $[a_1, \dots, a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}, \tau]^T$.

Il existe une grande variété de méthodes pour l'estimation paramétrique d'une fonction de transfert à temps continu (Garnier et Wang (2008); Landau (1976, 1979); Ljung et Soderstrom (1983); Ouvrard et Trigeassou (2011)). La détermination de la structure consiste à tester différents candidats n_a et n_b et à comparer les modèles obtenus à l'aide d'un critère (Akaike (1974); Söderström (1977)).

2.2.1.2 Modèle de Wiener à temps continu

La quasi-totalité des systèmes présente un comportement non linéaire. Pour que l'identification d'un système non linéaire soit précise, il faut choisir le modèle non linéaire en fonction de la non-linéarité. Notre système présente une non-linéarité statique comme il le sera montré par la suite. Or, la non-linéarité statique est souvent représentée par des modèles sous forme de schémas-blocs où la partie dynamique et la partie non linéaire statique sont séparées. Le modèle de Wiener peut modéliser cette non-linéarité. Il est composé d'une partie linéaire dynamique suivie par une partie non linéaire statique comme il est montré sur la figure 2.1.

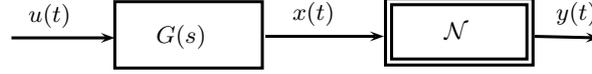


FIGURE 2.1 – Schéma du modèle Wiener

Le modèle de Wiener à temps continu estimé ultérieurement présente une partie dynamique sous la forme d'une fonction de transfert

$$G(s) = e^{-\tau s} \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.6)$$

La sortie intermédiaire $x(t)$ non mesurable est l'entrée du bloc non linéaire statique \mathcal{N} qui prend la forme, le plus souvent, d'un polynôme

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{i=0}^M \alpha_i x^i(t) \quad (2.7)$$

ou de tout autre expression mathématique capable de représenter la non-linéarité du système.

2.2.2 Les algorithmes d'estimation paramétrique

La structure du modèle impose la méthode d'estimation paramétrique à utiliser. Par conséquent, l'étape de modélisation doit être étudiée avec, entre autres critères, la disponibilité d'algorithmes d'estimation paramétrique précis et manipulables.

Deux grandes familles de méthodes d'identification peuvent être distinguées : les méthodes à erreur de sortie et les méthodes à erreur d'équation (Landau (1976); Ljung et Soderstrom (1983)).

Les méthodes à erreur de sortie (OE pour *Output Error*) présentent le formalisme décrit sur la figure 2.2. L'erreur est alors définie par

$$\epsilon_{OE} = y - \hat{y} = y - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} u \quad (2.8)$$

où y est la sortie mesurée, \hat{y} , la sortie simulée du modèle, u , l'excitation du système, $\frac{B}{A}$, le système avec les paramètres exacts, $\frac{\hat{B}}{\hat{A}}$, le modèle estimé, enfin, w est la perturbation de sortie.

La méthode à erreur de sortie repose sur le fait de minimiser un critère basé sur l'erreur de sortie ϵ_{OE} qui est la différence entre la valeur mesurée de la sortie et la valeur simulée du modèle estimé.

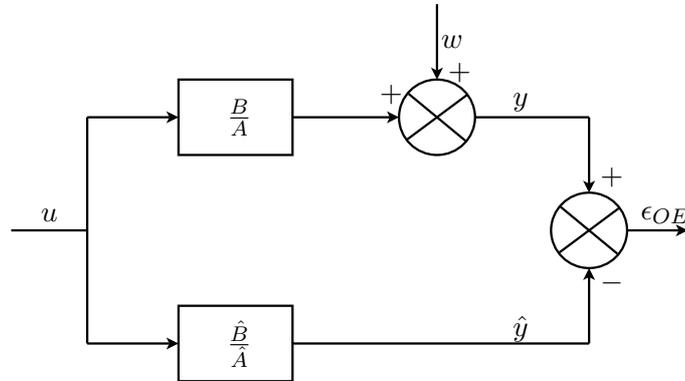


FIGURE 2.2 – Schéma de la méthode à erreur de sortie

Les méthodes à erreur d'équation (EE pour *Equation Error*) présentent le formalisme décrit sur la figure 2.3. L'erreur ϵ_{EE} est définie par

$$\epsilon_{EE} = \hat{A}y - \hat{B}u \quad (2.9)$$

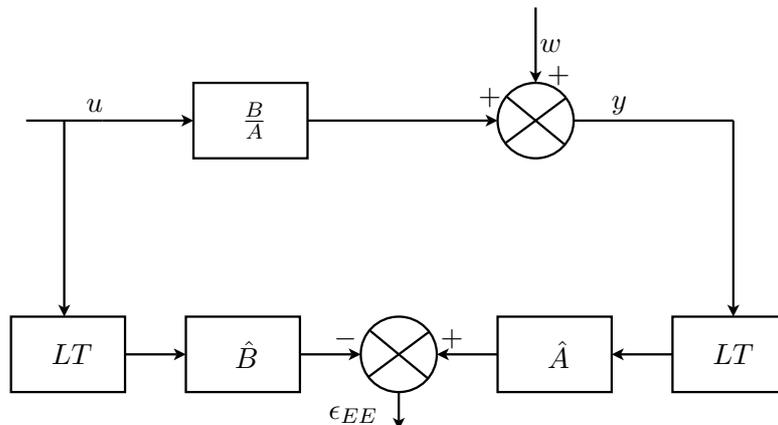


FIGURE 2.3 – Schéma de la méthode à erreur d'équation

Le bloc de transformation linéaire LT est utilisé dans le domaine du temps continu pour estimer les dérivées temporelles non mesurées. Ce bloc est égal à 1 dans le domaine du temps discret.

Les méthodes à erreur d'équation sont linéaires par rapport aux paramètres. L'estimation paramétrique peut se faire facilement en appliquant des techniques de moindres carrés. Cependant ces approches sont souvent biaisées en raison de l'existence du bruit de mesure. Dans le domaine du temps continu, cette estimation est biaisée même si les mesures sont affectées d'un bruit blanc, car le bloc

LT transforme le bruit blanc en un bruit coloré. Par contre, pour les méthodes à erreur de sortie, l'estimation paramétrique fait appel à une procédure itérative d'optimisation non linéaire pour minimiser une fonction coût. Ces méthodes n'ont pas de problème d'estimation biaisée, mais la convergence vers l'optimum global de l'algorithme utilisé n'est pas garantie. De plus, les méthodes à erreur de sortie nécessitent généralement une initialisation qui peut conduire vers un optimum local.

2.2.2.1 Algorithme à erreur d'équation

L'algorithme à erreur d'équation est basé sur l'estimation par les moindres carrés (Ljung (1999); Pearson (1988); Van den Hof (1989)). L'estimation est généralement biaisée même pour un bruit de mesure blanc et un nombre infini de données mesurées. La méthode de la variable instrumentale est un des moyens permettant de réduire ce biais (Young (1970, 2008)). Malgré ce problème de biais d'estimation, cette méthode est largement utilisée. Elle permet notamment l'initialisation des algorithmes à erreur de sortie.

Les approches à erreur d'équation se déclinent aussi bien en temps discret qu'en temps continu. Dans cette étude, on va présenter la formulation de cet algorithme seulement dans le domaine du temps continu.

Une représentation linéaire du système à temps continu peut être donnée par l'équation différentielle

$$y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_{n_a} \frac{d^{n_a} y(t)}{dt^{n_a}} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_{n_b} \frac{du^{n_b}(t)}{dt^{n_b}} + e(t) \quad (2.10)$$

où $y(t)$ est la sortie mesurée, $u(t)$ est l'entrée d'excitation du système et $e(t)$ est l'erreur d'équation.

Définissons le vecteur des paramètres inconnus

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}]^T \quad (2.11)$$

et le régresseur

$$\varphi(t) = \left[-\frac{dy(t)}{dt}, \dots, -\frac{d^{n_a} y(t)}{dt^{n_a}}, u(t), \dots, \frac{du^{n_b}(t)}{dt^{n_b}} \right]^T \quad (2.12)$$

L'équation différentielle s'exprime alors sous la forme d'une régression linéaire

$$y(t) = \theta^T \varphi(t) + e(t) \quad (2.13)$$

et le vecteur de paramètres peut être estimé par la méthodes des moindres carrés.

Malheureusement, les éléments du régresseur $\varphi(t)$, c'est-à-dire les dérivées temporelles des données d'entrée-sortie, sont généralement inaccessibles. Il est donc nécessaire d'implémenter une solution d'approximation des dérivées temporelles. Il existe trois classes de méthodes basées, respectivement, sur le filtrage, l'intégration ou les fonctions modulantes (Garnier *et al.* (2003)). Une comparaison de plusieurs méthodes est réalisée dans Tohme (2008). L'approche utilisée ultérieurement pour initialiser les algorithmes à erreur de sortie est basée sur les moments partiels réinitialisés (Ouvrard et Trigeassou (2011); Trigeassou (1987)).

2.2.2.2 Méthode des moments partiels réinitialisés

Cette approche basée sur les moments a été introduite par Trigeassou (1987).

Soit $f(t)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, \infty[$. Le moment d'ordre n de $f(t)$ est défini par

$$\mathcal{M}_n^f = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} f(t) dt \quad (2.14)$$

Le moment partiel correspond à une troncature sur l'intervalle $[0, T[$ de \mathcal{M}_n^f

$$\mathcal{M}_n^f(T) = \int_0^T \frac{t^n}{n!} f(t) dt \quad (2.15)$$

Pour présenter le principe des moments partiels réinitialisés (Ouvrard et Trigeassou (2011)), considérons un système du premier ordre donné par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -a_0 y_0(t) + b_0 u(t) \quad (2.16)$$

où $y_0(t)$ est considérée comme la sortie réelle du système.

Appliquons le moment partiel du premier ordre sur l'équation différentielle (2.16)

$$\int_0^T t \frac{dy_0(t)}{dt} = -a_0 \int_0^T t y_0(t) dt + b_0 \int_0^T t u(t) dt \quad (2.17)$$

Après une intégration par parties sur la partie gauche de l'équation (2.17), la formulation de la sortie $y_0(T)$ est obtenue

$$y_0(T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_1^{y_0}(T)}{T} + b_0 \frac{\mathcal{M}_1^u(T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_0^{y_0}(T)}{T} \quad (2.18)$$

Puisque la sortie réelle $y_0(t)$ est inaccessible, remplaçons ce signal par la sortie mesurée $y(t)$ perturbée par un bruit blanc de moyenne nulle. Alors, la formulation de la sortie correspondante présente une variance dépendant de l'intervalle défini par T . Il a été montré qu'une valeur T_{opt} de T fournit une variance minimale (Tohme (2008); Trigeassou (1987)). Afin de conserver une variance minimale à chaque instant t et d'éviter un temps de calcul croissant lorsque T augmente, les moments

partiels réinitialisés ont été introduits (Ouvrard et Trigeassou (2011); Trigeassou (1987)). Le principe consiste à calculer les intégrales sur un horizon glissant de largeur \hat{T} avec \hat{T} une approximation de T_{opt} .

Définissons le moment partiel réinitialisé d'ordre n de la fonction $f(t)$ par

$$M_n^f(t) = \int_0^{\hat{T}} \tau^n f(t - \hat{T} + \tau) d\tau \quad (2.19)$$

En remplaçant, dans (2.18), $y_0(t)$ par la sortie mesurée $y(t)$ et en considérant les moments partiels réinitialisés au lieu des moments partiels, l'estimation $\hat{y}(t)$ pour chaque instant t est obtenue

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= -\hat{a}_0 \frac{M_1^y(t)}{\hat{T}} + \hat{b}_0 \frac{M_1^u(t)}{\hat{T}} + \frac{M_0^y(t)}{\hat{T}} \\ &= \hat{a}_0 \alpha_0^y(t) + \hat{b}_0 \beta_0^u(t) + \gamma^y(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En utilisant le changement de variable $\mu = \hat{T} - \tau$, les moments partiels réinitialisés de l'équation (2.20) deviennent

$$\begin{aligned} M_1^v(t) &= \hat{T} \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \mu}{\hat{T}} v(t - \mu) d\mu \quad \text{avec } v = y \text{ ou } u \\ M_0^y(t) &= \hat{T} \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\hat{T}} y(t - \mu) d\mu \end{aligned} \quad (2.21)$$

et correspondent aux produits de convolution suivants

$$\begin{aligned} M_1^v(t) &= \hat{T} m(t) * v(t) \\ M_0^y(t) &= \hat{T} \left(\delta(t) - \frac{dm(t)}{dt} \right) * y(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

où δ est la fonction de Dirac, $*$ est le produit de convolution et

$$m(t) = \begin{cases} \frac{\hat{T}-t}{\hat{T}} & \text{si } t \in [0, \hat{T}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

Ainsi l'équation (2.20) est décrite par des produits de convolution comme suit

$$\hat{y}(t) = -\hat{a}_0(m(t) * y(t)) + \hat{b}_0(m(t) * u(t)) + \left(\delta(t) - \frac{dm(t)}{dt} \right) * y(t) \quad (2.24)$$

où $m(t)$ est un filtre FIR et \hat{T} est le paramètre de conception choisi au voisinage de T_{opt} .

La généralisation à la fonction de transfert suivante

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n_b} s^{n_b}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n_a-1} s^{n_a-1} + s^{n_a}}, \quad n_b \leq n_a \quad (2.25)$$

est décrite dans Ouvrard et Trigeassou (2011). Le modèle MPR (pour Moment Partiel Réinitialisé) à temps continu correspondant est donné par

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \sum_{i=0}^{n_a-1} \hat{a}_i \alpha_i^y(t) + \sum_{j=0}^{n_b} \hat{b}_j \beta_j^u(t) + \gamma^y(t) \\ &= \varphi(t) \hat{\theta}^{MPR} + \gamma^y(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [\alpha_0^y(t), \dots, \alpha_{n_a-1}^y(t), \beta_0^u(t), \dots, \beta_m^u(t)] \\ \hat{\theta}^{MPR} &= [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n_a-1}, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m]^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les éléments du régresseur $\varphi(t)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \alpha_0^y(t) &= -m(t) * y(t) \\ \beta_0^u(t) &= m(t) * u(t) \\ \alpha_i^y(t) &= -\frac{d^i m(t)}{dt^i} * y(t) \quad \text{pour } 1 \leq i < n_a \\ \beta_j^u(t) &= -\frac{d^j m(t)}{dt^j} * u(t) \quad \text{pour } 1 \leq j < n_b \\ \gamma^y &= \left(\delta(t) - \frac{d^{n_a} m(t)}{dt^{n_a}} \right) * y(t) \\ m(t) &= \begin{cases} \frac{(\hat{T}-t)^{n_a} t^{n_a-1}}{(n_a-1)! \hat{T}^{n_a}} & \text{si } t \in [0, \hat{T}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Considérons N données $\{u(kt_s), y(kt_s)\}_{k=1, \dots, N}$ où t_s est la période d'échantillonnage. Le vecteur de paramètres peut alors être estimé par la méthode des moindres carrés

$$\hat{\theta}^{MPR} = \left[\sum_{i=\hat{k}}^N \varphi(it_s) \varphi^T(it_s) \right]^{-1} \sum_{i=\hat{k}}^N \varphi(it_s) (y(it_s) - \gamma^y(it_s)) \quad (2.29)$$

où $\hat{T} = \hat{k} t_s$.

Les fonctions $\alpha_i^y(t)$, $\beta_j^u(t)$ et $\gamma^y(t)$ (2.28) sont calculées par convolution de l'entrée ou de la sortie avec le filtre FIR $m(t)$ ou ses dérivées. Pratiquement, on utilise une approche récursive décrite dans Ouvrard et Trigeassou (2011).

Les modèles MPR nécessitent le choix du paramètre de conception \hat{T} , appelé intervalle de réinitialisation. Il a été montré que la qualité des modèles MPR n'est pas très sensible à ce choix (Tohme (2008)). Le choix de \hat{T} par l'utilisateur n'est pas plus difficile que ceux de la fréquence de coupure et de l'ordre du filtre recommandé pour les modèles ARX (Ljung (2003)) ou que le choix d'autres paramètres de conception dans les techniques d'identification à temps continu (Garnier *et al.* (2003)).

Le paramètre de conception \hat{T} permet l'adaptation du modèle MPR à la nature du bruit (Ouvrard et Trigeassou (2011)) :

- Si la perturbation est de type bruit blanc erreur de sortie, c'est-à-dire que la structure du système appartient à l'ensemble des modèles à erreur de sortie, alors un intervalle de réinitialisation optimal existe. Notons-le \hat{T}_{wn} . Il fournit une variance minimale de l'erreur et un biais fortement réduit. Pour un système d'ordre faible (Tohme (2008)), \hat{T}_{wn} peut être choisi tel qu'il soit équivalent au double de la principale constante de temps pour un système apériodique ou au double du temps de montée (zéro - 90%) pour un système oscillant. Par contre, pour les systèmes d'ordre élevé, la valeur optimale \hat{T}_{wn} peut être trouvée seulement empiriquement en augmentant progressivement \hat{T} . Si $\hat{T} = \hat{T}_{wn}$, le modèle MPR est proche d'un modèle OE (Output Error), c'est-à-dire que le filtre FIR $m(t)$ est proche du filtre idéal de Steiglitz-McBride (Steiglitz et McBride (1965)). Pour plus de détails voir la section 2.3.2 de Tohme (2008) et Ouvrard *et al.* (2010); Tohme *et al.* (2009).
- Si la perturbation est de type bruit blanc erreur d'équation, c'est-à-dire que la structure du système appartient à l'ensemble des modèles ARX, alors l'intervalle de réinitialisation doit être égal à $n_a t_s$. Ainsi, le modèle MPR est équivalent à un modèle ARX et l'estimation est non biaisée.
- Si la perturbation est un bruit coloré, c'est-à-dire que la structure du système n'appartient pas à l'ensemble des modèles ARX ou des modèles OE, alors l'intervalle de réinitialisation optimal appartient à l'intervalle $]n_a t_s, \hat{T}_{wn}[$.

En pratique, la valeur de \hat{T} peut être choisie empiriquement en faisant croître \hat{T} et en comparant les résultats à l'aide d'un critère tel que le critère quadratique ou l'auto-corrélation des résidus.

Notons qu'il est recommandé d'utiliser la méthode de la variable instrumentale avec modèle auxiliaire (Ouvrard et Trigeassou (2011); Young (1970, 2008)) afin d'éliminer le biais.

2.2.2.3 Algorithme à erreur de sortie

Les algorithmes à erreur de sortie nécessitent une implémentation itérative, appelée programmation non linéaire, pour la minimisation d'un critère. Ils s'ap-

pliquent à une large variété de modèles représentant la majorité des systèmes industriels. Ces approches peuvent s'appliquer aussi bien à des modèles à temps discret qu'à temps continu. La principale propriété de ces outils est qu'ils fournissent, sous certaines conditions, une estimation non biaisée (Jallut *et al.* (2001); Landau (1976, 1979); Richalet (1991); Richalet *et al.* (1971); Trigeassou et Poinot (2001); Walter et Pronzato (1997)).

Le problème fondamental, que rencontrent les algorithmes à erreur de sortie, est la convergence asymptotique vers un optimum local (Pronzato et Walter (2001)). Ce problème peut être résolu partiellement en appliquant l'algorithme pour plusieurs points d'initialisation, et l'optimum est ensuite choisi. Mais on ne peut pas nier que cette technique prend beaucoup de temps. Un autre moyen d'approcher la convergence globale consiste en un travail amont à l'algorithme à erreur de sortie qui permet de choisir une initialisation au plus proche de l'optimum global. L'algorithme à erreur d'équation basé sur les moments partiels réinitialisés (Ouvrard et Trigeassou (2011); Trigeassou (1987)), comme d'autres techniques, offre une bonne initialisation pouvant mener à la convergence globale, sans toutefois pouvoir la garantir.

Comme pour les algorithmes à erreur d'équation, les algorithmes à erreur de sortie sont ici introduits dans le cadre de l'estimation des paramètres d'une fonction de transfert à temps continu.

Considérons le cas sans erreur de modélisation. Le système est défini par la fonction de transfert à temps continu suivante

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned} A(s) &= 1 + a_1s + \dots + a_{n_a}s^{n_a} \\ B(s) &= b_0 + b_1s + \dots + b_{n_b}s^{n_b} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La sortie $\hat{y}(t, \hat{\theta}_i)$ du modèle à identifier, qui dépend du vecteur de paramètres $\hat{\theta}_i$ estimé à l'itération i , est donnée par

$$\hat{Y}(s, \hat{\theta}_i) = \frac{\hat{B}(s, \hat{\theta}_i)}{\hat{A}(s, \hat{\theta}_i)}U(s) \quad (2.32)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}(s, \hat{\theta}_i) &= 1 + \hat{a}_1s + \dots + \hat{a}_{n_a}s^{n_a} \\ \hat{B}(s, \hat{\theta}_i) &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1s + \dots + \hat{b}_{n_b}s^{n_b} \end{aligned} \quad (2.33)$$

et

$$\hat{\theta}_i = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_a}, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{n_b}]^T \quad (2.34)$$

Les algorithmes d'optimisation utilisés pour estimer le modèle consistent à minimiser itérativement une fonction coût. Cette dernière est généralement un simple critère quadratique qui exprime l'erreur entre la sortie mesurée et la sortie simulée du modèle. Considérons N données $\{u(k t_s), y(k t_s)\}_{k=1, \dots, N}$ où t_s est la période d'échantillonnage, le critère quadratique est alors défini par

$$J(\hat{\theta}_i) = \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}_i))^2 \quad (2.35)$$

Il existe différents algorithmes d'optimisation. Les algorithmes de Newton, du gradient et de Levenberg-Marquardt sont décrits dans cette présentation.

L'algorithme de Newton est défini par l'équation itérative suivante

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[J''(\hat{\theta}) \right]^{-1} J'(\hat{\theta}) \right\}_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_i} \quad (2.36)$$

où $J'(\hat{\theta})$ et $J''(\hat{\theta})$ sont, respectivement, le gradient et le Hessien (approximation de Gauss-Newton) de $J(\hat{\theta})$ définis par

$$J'(\hat{\theta}) = \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2 \sum_{k=1}^N \sigma_{\hat{\theta}}(k, \hat{\theta}) (y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta})) \quad (2.37)$$

$$J''(\hat{\theta}) = \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta}^2} \approx 2 \sum_{k=1}^N \sigma_{\hat{\theta}}(k, \hat{\theta}) \sigma_{\hat{\theta}}^T(k, \hat{\theta}) \quad (2.38)$$

où $\sigma_{\hat{\theta}}(k, \hat{\theta})$ est le vecteur des fonctions de sensibilité paramétrique.

Considérons le paramètre η , à l'instant $t = k t_s$, la fonction de sensibilité par rapport au paramètre η est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}(t, \hat{\theta}) &= \sigma_{\eta}(k, \hat{\theta}) = \frac{\partial \hat{y}(k, \hat{\theta})}{\partial \eta} \\ \varsigma_{\eta}(s, \hat{\theta}) &= \mathcal{L}(\sigma_{\eta}(t, \hat{\theta})) \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $\mathcal{L}(\bullet)$ est la transformée de Laplace. Dans cette application, η représente \hat{a}_i ou \hat{b}_i .

L'algorithme de Newton conduit à une convergence rapide au voisinage de l'optimum. Cependant, il est très sensible au conditionnement du Hessien ; celui-ci doit

être strictement positif pour être inversible. Le problème fondamental de cet algorithme est qu'il peut être instable.

L'algorithme de gradient est, quant à lui, défini par

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \lambda J'(\hat{\theta}) \right\}_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_i} \quad (2.40)$$

où λ est un scalaire positif qui fixe la largeur du pas de convergence. De ce scalaire va dépendre la stabilité de l'algorithme. Si λ tend vers zéro la stabilité est assurée, par contre la convergence peut être lente au voisinage de l'optimum.

Pour avoir un bon compromis entre la stabilité qui caractérise l'algorithme de gradient et la convergence rapide qui distingue l'algorithme de Newton, l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Marquardt (1963)) a été défini comme suit

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[J''(\hat{\theta}) + \mu I \right]^{-1} J'(\hat{\theta}) \right\}_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_i} \quad (2.41)$$

Cet algorithme consiste à remplacer le Hessien $J''(\hat{\theta})$ de l'algorithme de Newton par la matrice $\left[J''(\hat{\theta}) + \mu I \right]$. Le coefficient μ conditionne la recherche de l'optimum. Si μ est grand, la matrice diagonale μI est prédominante et l'algorithme se comporte comme l'algorithme du gradient. Si μ tend vers zéro, on retrouve la méthode de Newton.

A l'initialisation de l'algorithme, μ est fixé à une valeur élevée afin d'assurer la stabilité. Puis, pendant le processus itératif, si le critère J augmente, c'est-à-dire qu'il y a divergence, alors le nouveau vecteur de paramètre est ignoré, l'itération n'est pas considérée et la valeur de μ est augmentée jusqu'à ce que J diminue. Si J diminue, c'est-à-dire que la direction de recherche est la bonne, alors la valeur de μ est diminuée pour accélérer la convergence.

Dans la mise en oeuvre des algorithmes à erreur de sortie présentés précédemment, le calcul des fonctions de sensibilité est essentiel. La différentiation numérique, l'approche la plus facile à réaliser, peut être utilisée, mais le calcul est approximatif. Par conséquent, le calcul du gradient, qui donne la direction de recherche, n'est pas exact. Il est souvent préférable de calculer et simuler les fonctions de sensibilité exactes. Cette solution nécessite, quant à elle, un temps de calcul plus important dû aux simulations réalisées à chaque itération.

En considérant la sortie du modèle donné par (2.32), il est facile de calculer les

fonctions de sensibilité comme suit

$$\begin{aligned}\varsigma_{\hat{b}_j}(s, \hat{\theta}_i) &= \frac{s^j}{\hat{A}(s, \hat{\theta}_i)} U(s, \hat{\theta}_i) \\ \varsigma_{\hat{a}_j}(s, \hat{\theta}_i) &= \frac{-s^j}{\hat{A}(s, \hat{\theta}_i)} \hat{Y}(s, \hat{\theta}_i)\end{aligned}\quad (2.42)$$

et d'établir le vecteur des fonctions de sensibilité

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{\theta}}(t, \hat{\theta}) &= \left[\sigma_{\hat{a}_1}(t, \hat{\theta}), \dots, \sigma_{\hat{a}_{n_a}}(t, \hat{\theta}), \sigma_{\hat{b}_0}(t, \hat{\theta}), \dots, \sigma_{\hat{b}_{n_b}}(t, \hat{\theta}) \right]^T \\ \varsigma_{\hat{\theta}}(s, \hat{\theta}) &= \mathcal{L}(\sigma_{\hat{\theta}}(t, \hat{\theta}))\end{aligned}\quad (2.43)$$

2.2.2.4 Initialisation des algorithmes à erreur de sortie

Le principal problème rencontré par la méthode à erreur de sortie est de choisir la bonne initialisation qui conduit vers l'optimum global. Considérons l'exemple du critère représenté sur la figure 2.4, fonction d'un seul paramètre θ . Si $\theta_{initial}$ est inférieur à θ_C , l'algorithme peut converger vers l'optimum global θ_A . Par contre, si $\theta_{initial}$ est supérieur à θ_C , il est très probable que l'algorithme converge vers l'optimum secondaire θ_D . Cet exemple montre que la convergence vers l'optimum global est très sensible aux valeurs initiales du vecteur de paramètres.

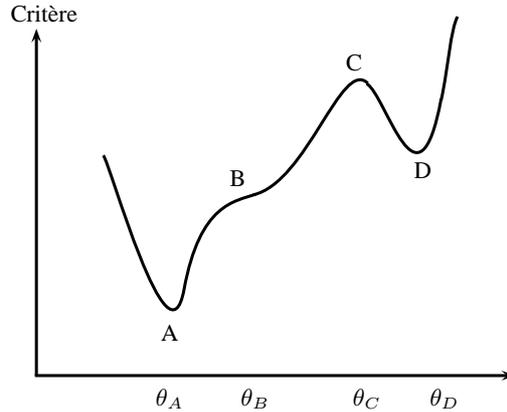


FIGURE 2.4 – Critère à un seul paramètre avec optimum local

Différentes approches, permettant l'initialisation des algorithmes à erreur de sortie, ont été présentées dans Ouvrard *et al.* (2010); Tohme (2008); Tohme *et al.* (2009, 2006). Dans la suite de cette étude, l'initialisation des algorithmes à erreur de sortie sera réalisée par l'approche basée sur les moments partiels réinitialisés.

2.3 Applications

2.3.1 Recherche du point de fonctionnement

Un test sur le pilote a été réalisé en boucle ouverte pour trouver le point de fonctionnement nominal. Le signal de commande et les réponses collectées sont présentées sur la figure 2.5.

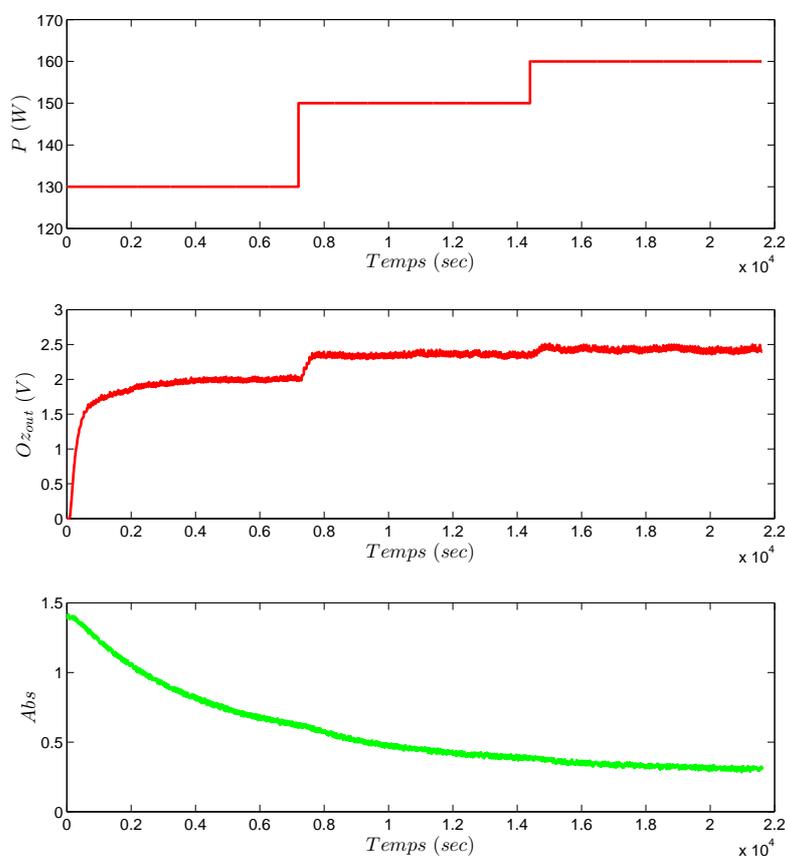


FIGURE 2.5 – Réponses de l’ozone dans les événements et de l’absorbance à une excitation en échelon de la puissance de l’ozoneur

Selon l’évolution obtenue de l’absorbance, on en déduit que la gamme de commande [130W,160W] permet de réaliser l’abattement désiré du paranitrophénol, à savoir un abattement de la teneur en matières organiques correspondant à une absorbance résiduelle à 340 nm de 0.5. Ce qui correspond à un abattement d’au moins 30 % en DCO (DCO éliminé par rapport à la DCO initiale de la solution).

En termes d’identification, on constate que la réponse de l’ozone dans les événements

(proportionnelle avec la concentration résiduelle en ozone dans les gaz) doit permettre l'identification d'un modèle linéaire. Par contre, la réponse de l'absorbance ne varie que très peu pour cette gamme de commande. Pour le simple contrôle de l'ozone dans les événements présenté ultérieurement, un modèle du transfert entre l'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$ et la commande $P(t)$ est suffisant. Dans ce cas, les signaux obtenus avec la gamme $[130W, 160W]$ peuvent être utilisés pour l'étape d'identification. Par contre, pour des schémas de commande plus complexes, la modélisation des deux transferts Oz_{out}/P et Abs/P est nécessaire. Dans ce cas, des tests avec une gamme de commande $[70W, 240W]$ seront réalisés.

En termes de contrôle, les schémas de commande envisagés permettront une régulation autour du point de fonctionnement menant à un abattement de la charge polluante correspondant à une absorbance résiduelle de 0.5.

2.3.2 Protocole d'identification

Le système étudié présente une entrée, la puissance P , et deux sorties, l'ozone dans les événements Oz_{out} et l'absorbance Abs . Par conséquent, les transferts Oz_{out}/P et Abs/P peuvent être identifiés séparément.

Les essais expérimentaux consistent à réaliser des variations de la puissance P à partir d'un point initial $P(0)$. Cette puissance initiale est appliquée en début d'essai pendant 5000 secondes pour approcher le point de fonctionnement correspondant à une absorbance de 0.5. Cette partie transitoire n'est pas considérée dans les données d'identification.

Deux structures sont étudiées pour la modélisation du système.

La première structure, présentée sur la figure 2.6, est un modèle linéaire représenté par une fonction transfert $G(s)$ à temps continu. \hat{y}_0 est la composante initiale de la sortie. L'entrée $u(t) = P(t) - P(0)$ considérée correspond à la variation de la puissance. La sortie \hat{y} du modèle représente l'ozone dans les événements Oz_{out} ou l'absorbance Abs selon le transfert étudié.



FIGURE 2.6 – Schéma type du modèle linéaire

Les fonctions de transfert sont définies comme suit

$$\begin{aligned}\hat{Y}(s, \hat{\theta}) &= \frac{\hat{y}_0}{s} + G(s)U(s) \\ &= \frac{\hat{y}_0}{s} + \frac{e^{-\hat{\tau}s}(\hat{b}_0 + \dots + \hat{b}_{n_b}s^{n_b})}{\hat{a}_0 + \dots + \hat{a}_{n_a-1}s^{n_a-1} + s^{n_a}}U(s)\end{aligned}\quad (2.44)$$

où $\hat{\tau}$ est un retard pur, $\hat{Y}(s, \hat{\theta})$ et $U(s)$ sont les transformées de Laplace des signaux temporels $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ et $u(t)$, respectivement, et $\hat{\theta} = [\hat{y}_0, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{n_b}, \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n_a-1}, \hat{\tau}]^T$ est le vecteur de paramètres à identifier. La sortie $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ peut représenter le signal d'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$, donné en Volts par le capteur d'ozone, ou bien le signal d'absorbance $Abs(t)$, donné en Volts par le spectrophotomètre. La variation de puissance $u(t) = P(t) - P(0)$ est donnée en Watts.

Les dérivées de l'entrée et des sorties sont inaccessibles, le modèle à temps continu est donc non linéaire par rapport aux paramètres. Par conséquent, une méthode à erreur de sortie (paragraphe 2.2.2.3) est utilisée pour estimer les paramètres. Plus particulièrement, un algorithme de Levenberg-Marquardt est mis en œuvre. Les fonctions de sensibilité sont calculées comme suit

$$\begin{aligned}\varsigma_{\hat{y}_0}(s, \hat{\theta}) &= \frac{1}{s} \\ \varsigma_{\hat{b}_i}(s, \hat{\theta}) &= \frac{s^i e^{-\hat{\tau}s}}{\hat{a}_0 + \dots + s^{n_a}}U(s) \\ \varsigma_{\hat{a}_i}(s, \hat{\theta}) &= \frac{-s^i}{\hat{a}_0 + \dots + s^{n_a}}Y(s, \hat{\theta}) \\ \varsigma_{\hat{\tau}}(s, \hat{\theta}) &= -s e^{-\hat{\tau}s}Y(s, \hat{\theta})\end{aligned}\quad (2.45)$$

et le vecteur des fonctions de sensibilité est formulé ainsi

$$\varsigma_{\hat{\theta}}(s, \hat{\theta}) = \left[\varsigma_{\hat{y}_0}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{b}_0}(s, \hat{\theta}), \dots, \varsigma_{\hat{b}_{n_b}}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{a}_0}(s, \hat{\theta}), \dots, \varsigma_{\hat{a}_{n_a-1}}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{\tau}}(s, \hat{\theta}) \right]^T \quad (2.46)$$

Pour permettre une bonne convergence de l'algorithme à erreur de sortie, son initialisation est réalisée à partir des paramètres estimés avec la technique à erreur d'équation basée sur les moments partiels réinitialisés (paragraphe 2.2.2.2).

La deuxième structure, présentée sur la figure 2.7, permet de représenter un comportement non linéaire du système. Cette structure se base sur la forme générale du modèle Wiener qui est composé d'un bloc linéaire dynamique $G(s)$ suivi par un bloc non linéaire statique \mathcal{N} .

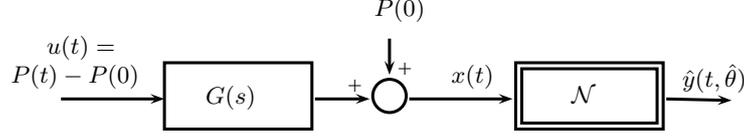


FIGURE 2.7 – Schéma type du modèle non linéaire de Wiener

Le bloc dynamique linéaire est une fonction de transfert à temps continu avec un gain unitaire et un retard pur $\hat{\tau}$

$$G(s) = \frac{e^{-\hat{\tau}s} (1 + \hat{b}_1 s + \dots + \hat{b}_{n_b} s^{n_b})}{1 + \hat{a}_1 s + \dots + \hat{a}_{n_a} s^{n_a}} \quad (2.47)$$

Le bloc non linéaire statique consiste en un polynôme donné par

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = \mathcal{N}(x) = \sum_{i=0}^M \alpha_i x^i(t) \quad (2.48)$$

Notons que, pour éviter le problème de signal $x(t)$ négatif dans le polynôme ci-dessus, la puissance initiale $P(0)$ est ajoutée en sortie du bloc linéaire. Cette opération est permise par le fait de considérer un gain unitaire dans $G(s)$. Ainsi, $x(t)$ est toujours positif (Cerone et Regruto (2006)).

Ce second modèle est également non linéaire par rapport aux paramètres. Un algorithme de Levenberg-Marquardt initialisé par la technique des moments partiels réinitialisés est de nouveau appliqué. Définissons le vecteur de paramètres suivant

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_a}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n_b}, \hat{\tau}, \hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_M] \quad (2.49)$$

Selon la définition (2.39), les fonctions de sensibilité sont calculées comme suit

$$\begin{aligned} \varsigma_{\hat{\alpha}_j}(s, \hat{\theta}) &= X^j(s) \\ \varsigma_{\hat{c}_j}(s, \hat{\theta}) &= \hat{a}_1 \frac{\partial X(s)}{\partial \hat{c}_j} + \dots + M \hat{\alpha}_M \frac{\partial X(s)}{\partial \hat{c}_j} X^{M-1}(s) \quad \text{où } \hat{c}_j = \hat{a}_j, \hat{b}_j \text{ ou } \hat{\tau} \\ \frac{\partial X(s)}{\partial \hat{a}_j} &= \frac{-s^j}{1 + \hat{a}_1 s + \dots + \hat{a}_{n_a} s^{n_a}} X(s) \\ \frac{\partial X(s)}{\partial \hat{b}_j} &= \frac{s^j e^{-\hat{\tau}s}}{1 + \hat{a}_1 s + \dots + \hat{a}_{n_a} s^{n_a}} U(s) \\ \frac{\partial X(s)}{\partial \hat{\tau}} &= -sX(s) \end{aligned} \quad (2.50)$$

et le vecteur des fonctions de sensibilité est le suivant

$$\varsigma_{\hat{\theta}}(s, \hat{\theta}) = \left[\varsigma_{\hat{a}_1}(s, \hat{\theta}), \dots, \varsigma_{\hat{a}_{n_a}}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{b}_1}(s, \hat{\theta}), \dots, \varsigma_{\hat{b}_{n_b}}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{\tau}}(s, \hat{\theta}), \varsigma_{\hat{\alpha}_0}(s, \hat{\theta}), \dots, \varsigma_{\hat{\alpha}_M}(s, \hat{\theta}) \right]^T \quad (2.51)$$

2.3.3 Conditions expérimentales

Comme il a été montré précédemment, l'effluent utilisé dans nos tests est synthétique et représentatif de molécules organiques présentes dans des eaux industrielles. La DCO initiale est constante et donc la valeur initiale d'absorbance est aussi constante comme indiqué dans le tableau 2.1. Le débit d'eau est constant et le pH est libre ($pH = 2.6$ dans l'état d'équilibre pour l'effluent traité). La période d'échantillonnage pour l'acquisition des signaux est de 0.4s et tous les essais sont faits en l'absence du catalyseur.

TABLE 2.1 – Paramètres constants

DCO initiale de l'effluent	500 mg/L
Absorbance initiale de l'effluent à 340 nm	1.5
Débit de l'effluent	25 L/h
pH initial de la solution de paranitrophénol	5
Température ambiante	~ 20 $^{\circ}C$
Volume du réacteur	19 litres

2.3.4 Identification du transfert Oz_{out}/P

2.3.4.1 Signaux d'entrée-sortie

Un essai en boucle ouverte pour obtenir les signaux nécessaires à l'identification est réalisé. L'entrée P et les sorties Oz_{out} et Abs sont présentées dans la figure 2.8.

La partie transitoire, qui dure environ 5000 secondes, n'est pas considérée. Les données d'entrée $u(t) = P(t) - P(0)$ et de la sortie Oz_{out} qui sont utilisées pour l'identification sont montrées dans la figure 2.9.

2.3.4.2 Résultats d'identification

Des fonctions de transfert avec un nombre croissant de zéros et de pôles ont été comparées. Ceci a montré qu'une fonction de transfert du premier ordre donne un résultat d'identification convenable. Le modèle estimé obtenu avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt est le suivant

$$Y(s, \hat{\theta}) = \frac{2.28}{s} + \frac{0.00010e^{-78.21s}}{0.00772 + s} U(s) \quad (2.52)$$

La sortie mesurée du système et la sortie simulée du modèle sont montrées sur la figure 2.10.

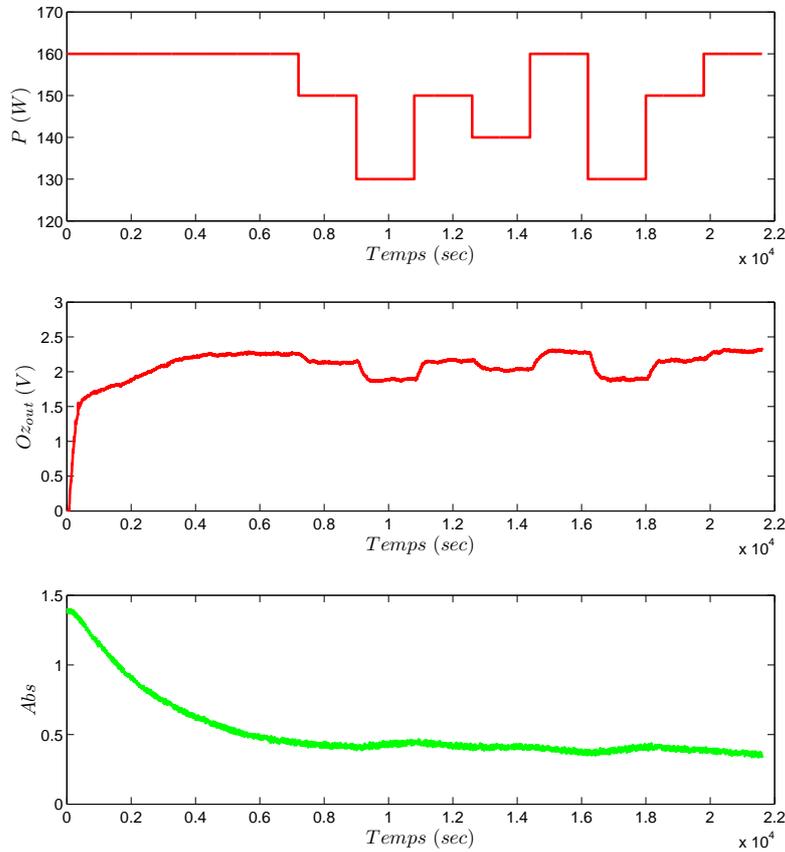


FIGURE 2.8 – Signaux d'entrée-sortie (essai 1)

2.3.5 Identification des transferts O_{zout}/P et Abs/P

L'excitation du système avec une gamme de commande variable dans l'intervalle $[130W, 160W]$ ne permet pas d'avoir une réponse d'absorbance suffisamment riche pour l'identification. Un nouvel essai est réalisé avec les mêmes conditions initiales mais en excitant le procédé avec une gamme de commande plus large $[70W, 240W]$.

2.3.5.1 Signaux d'entrée-sortie

L'entrée P et les sorties O_{zout} et Abs sont présentées dans la figure 2.11.

On peut observer que l'absorbance présente une lente dérive due à un phénomène d'accumulation. Cette dynamique très lente peut être négligée en termes d'application de contrôle. Ainsi pour identifier le transfert Abs/P , un filtrage des signaux P et Abs a été réalisé avec un filtre passe-haut d'ordre 4 et une fréquence de coupure de $7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$.

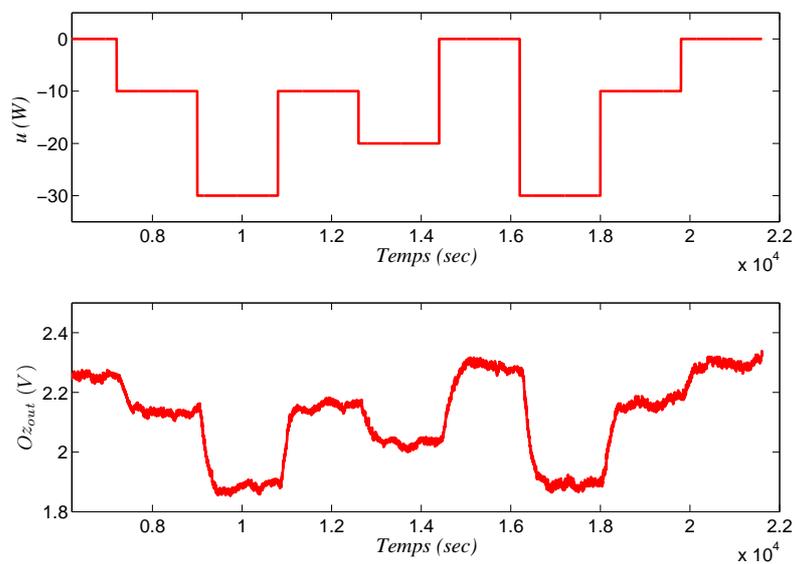


FIGURE 2.9 – Signaux d'identification (essai 1)

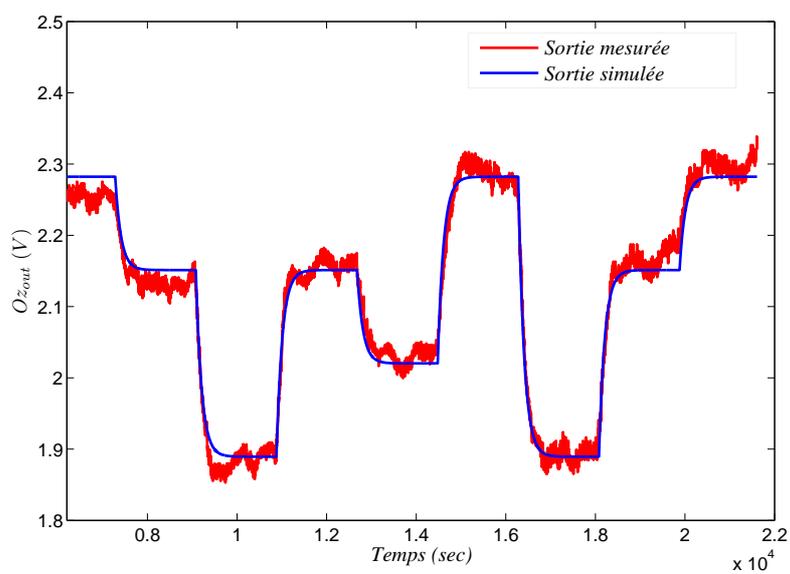


FIGURE 2.10 – Sortie mesurée et sortie simulée (essai 1)

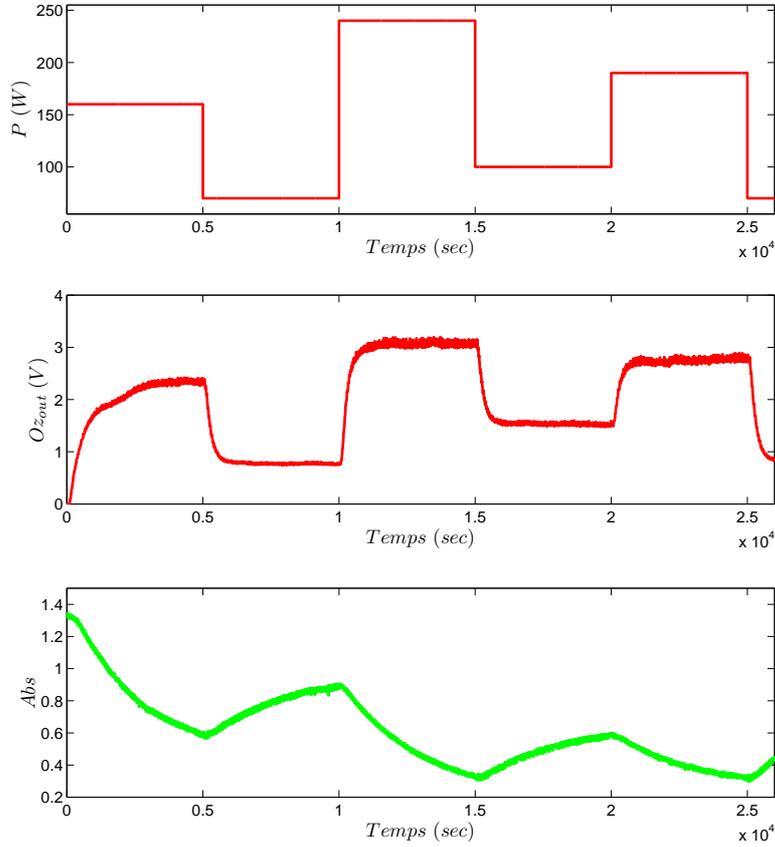


FIGURE 2.11 – Signaux d'entrée-sortie (essai 2)

On néglige la partie transitoire sur environ 5000 secondes pour les raisons précédemment citées. Les données utilisées pour l'identification du transfert Oz_{out}/P et du transfert Abs/P sont présentées sur les figures 2.12 et 2.13, respectivement.

2.3.5.2 Résultats d'identification

Les modèles, obtenus avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt initialisé par la technique des moments partiels réinitialisés, sont les suivants

$$\begin{aligned} Oz_{out}(s, \hat{\theta}_1) &= \frac{2.157}{s} + \frac{0.00006e^{-106.7s}}{0.0045 + s} U(s) \\ Abs(s, \hat{\theta}_2) &= \frac{0.564}{s} - \frac{1.36 \cdot 10^{-6} e^{-200s}}{0.00027 + s} U(s) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Les sorties mesurées Oz_{out} et Abs du système et les sorties simulées des modèles estimés sont présentées sur la figure 2.14.

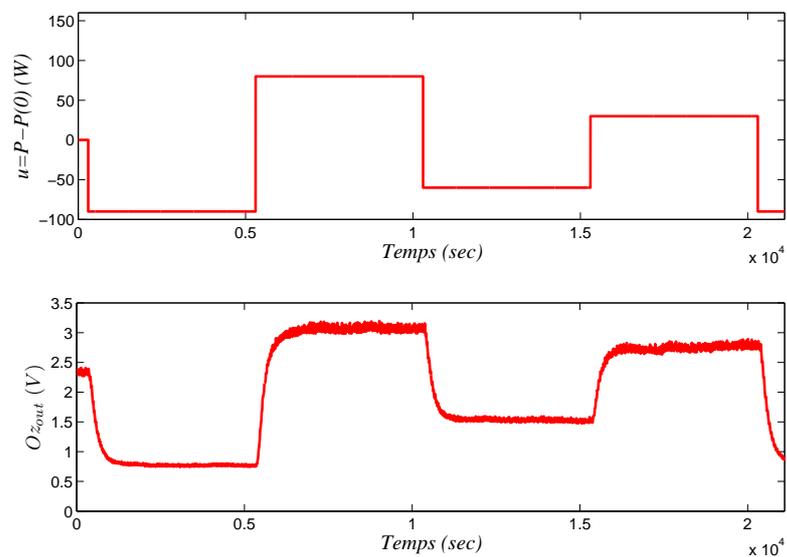


FIGURE 2.12 – Signaux d'identification pour le transfert $O_{z_{out}}/P$ (essai 2)

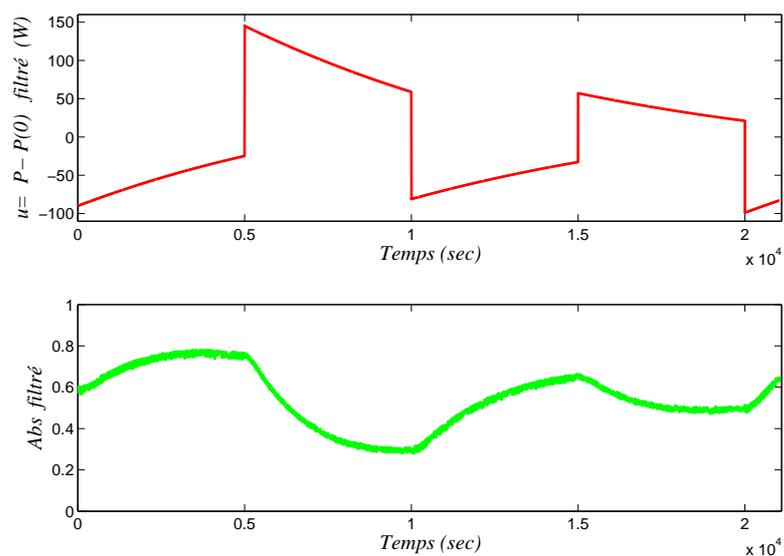


FIGURE 2.13 – Signaux d'identification pour le transfert Abs/P (essai 2)

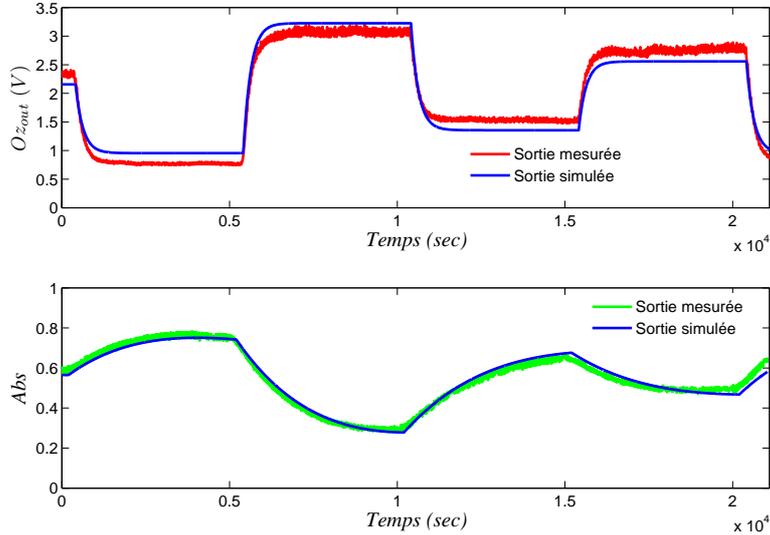


FIGURE 2.14 – Sorties mesurées et simulées (essai 2)

On peut constater que le transfert Abs/P est bien modélisé. Par contre, le modèle du transfert Oz_{out}/P est moins précis car une non-linéarité apparaît avec la gamme de commande utilisée dans l'essai d'identification.

2.3.6 Identification non linéaire du transfert Oz_{out}/P (Abouzlam *et al.* (2012b))

Pour des applications de contrôle, le modèle (2.53) est convenable. Sa simplicité facilite la synthèse des lois de commande. Cependant, il est intéressant de représenter le comportement non linéaire du transfert Oz_{out}/P pour tester en simulation les lois de commande, par exemple. Un troisième essai d'identification a donc été réalisé avec les conditions initiales du tableau 2.1 et la gamme de commande $[70W, 240W]$.

Le transfert Oz_{out}/P est cette fois représenté par un modèle de Wiener capable de suivre une non-linéarité statique.

En identification non linéaire, des précautions particulières doivent être prises quant à la validation des modèles. Pour cela, les signaux sont séparés en deux parties : une partie pour l'identification et une autre partie pour la validation. Dans cet essai d'identification, le transfert Abs/P n'est pas considéré. Par conséquent, la largeur des créneaux d'entrée P est réduite pour permettre une meilleure excitation du transfert Oz_{out}/P sur un horizon expérimental équivalent.

Le modèle Wiener à temps continu utilisé pour représenter le transfert Oz_{out}/P est décrit sur la figure 2.15. Il correspond à la deuxième structure présentée dans le paragraphe 2.3.2.

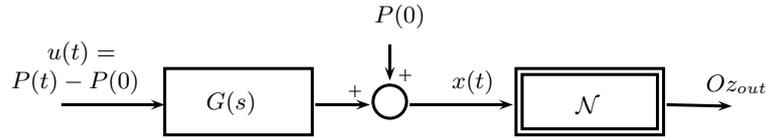


FIGURE 2.15 – Modèle Wiener à temps continu pour le transfert Oz_{out}/P

2.3.6.1 Signaux d'entrée-sortie

Le signal de commande et les réponses correspondantes sont présentés sur la figure 2.16.

La partie transitoire pour arriver au point de fonctionnement sur 5000 secondes avec une puissance de 160 W n'est pas considérée. Les données d'identification sont comprises entre 5000 et 15000 secondes. Les données de validation sont collectées après 15000 secondes.

On peut observer que l'ozone dans les événements présente une lente dérive dans cet essai. Un filtrage des signaux P et Oz_{out} a été réalisé avec un filtre passe-haut d'ordre 4 et une fréquence de coupure de $1 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$. Les données filtrées utilisées pour l'identification sont montrées sur la figure 2.17.

2.3.6.2 Résultats d'identification

Pour la recherche de la meilleure structure du modèle Wiener, des ordres croissants sont considérés. Différentes initialisations sont également testées pour approcher l'optimum global. Pour mesurer la qualité de l'estimation, le critère du FIT est introduit

$$FIT = 100 \times \left(1 - \frac{\|y(kt_s) - \hat{y}(kt_s, \hat{\theta})\|}{\|y(kt_s) - \text{mean}(y(kt_s))\|} \right) \quad (2.54)$$

Les différentes structures sont comparées dans le tableau 2.2. On constate une nette différence entre les troisième et quatrième lignes. On peut conclure que la partie linéaire dynamique peut être modélisée par une fonction de transfert du premier ordre, et que la partie non linéaire statique peut être représentée par un

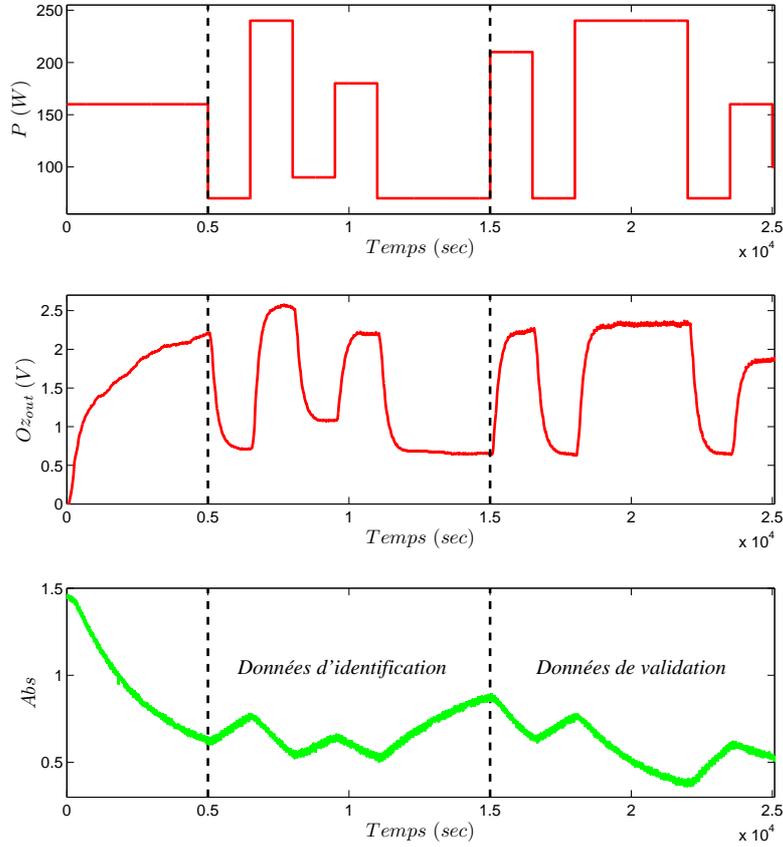


FIGURE 2.16 – Données d'entrée-sortie (essai 3)

polynôme de deuxième ordre avec les paramètres suivants

$$\hat{O}_{z_{out}}(t) = -0.756 + 0.0239x(t) - 4.18 \cdot 10^{-5}x^2(t)$$

$$\text{avec } X(s) = G(s) \left(P(s) - \frac{160}{s} \right) + \frac{160}{s} \quad (2.55)$$

$$G(s) = \frac{e^{-119.5s}}{1 + 189.56s}$$

Les sorties mesurées et simulées sont données sur la figure 2.18.

2.4 Conclusion

Trois essais d'identification du système d'ozonation catalytique ont été réalisés durant cette thèse.

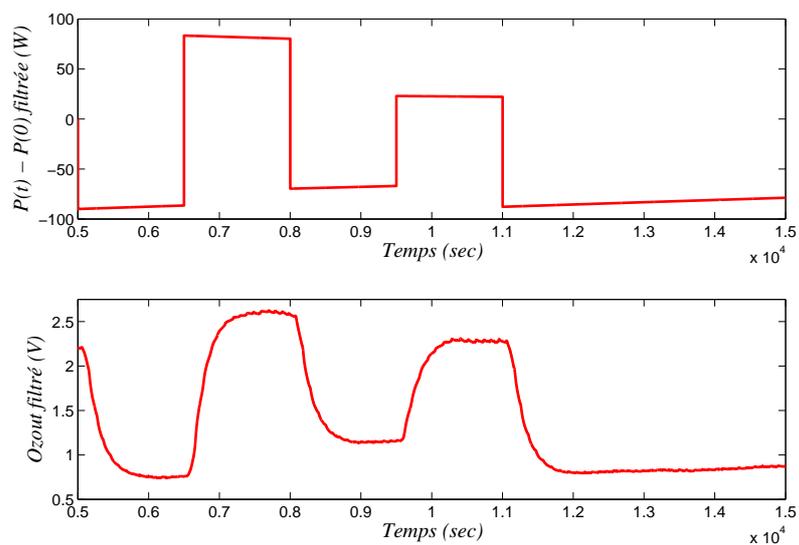


FIGURE 2.17 – Données d'identification (essai 3)

TABLE 2.2 – Valeurs du FIT pour différentes structures

n_a	n_b	M	FIT sur données d'identification	FIT sur données de validation
1	0	1	82.4	70.7
2	0	1	82.4	70.8
2	1	1	82.4	71.0
1	0	2	90.1	86.0
2	0	2	90.2	86.1
2	1	2	90.2	86.2
1	0	3	90.1	86.0
2	0	3	90.3	86.2
1	0	4	90.1	86.0

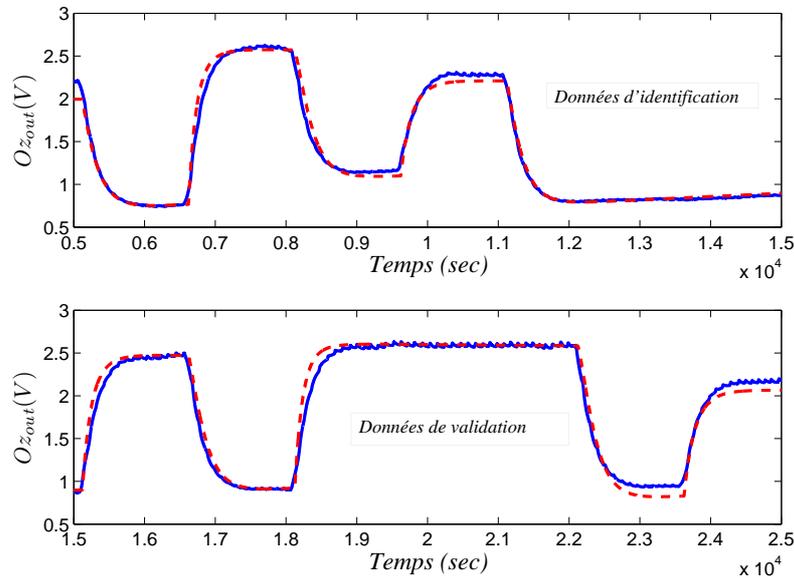


FIGURE 2.18 – Sorties simulées (ligne pointillée) et mesurées (ligne continue) (essai 3)

- Le premier essai réalisé a permis d'identifier seulement le transfert Oz_{out}/P sur une gamme de commande appliquée insuffisante pour estimer le transfert Abs/P . Dans cette étude, le modèle du transfert Oz_{out}/P est une fonction de transfert à temps continu du premier ordre. Ce modèle a permis la synthèse d'une loi de commande par modèle interne présenté dans le paragraphe 3.3.1.1 (Abouzlam *et al.* (2012a)).

- Le deuxième essai a été réalisé avec une variation plus importante de la commande pour identifier les deux transferts Oz_{out}/P et Abs/P . Les deux transferts sont modélisés par des fonctions de transfert à temps continu du premier ordre. Ces modèles linéaires ont permis le développement de lois de commande robuste (Abouzlam *et al.* (2013a)).

- Le troisième essai a permis d'identifier le comportement non linéaire du transfert Oz_{out}/P à l'aide d'un modèle de Wiener. Dans cet essai expérimental, l'intervalle d'acquisition des signaux a été divisé en deux parties pour l'identification et la validation. Pour obtenir une excitation riche en fréquence, la période des échelons successifs a été réduite par rapport aux essais précédents, rendant les signaux inadaptés à l'identification du transfert Abs/P . Pour ce dernier, le modèle obtenu au deuxième essai a été conservé. Cette modélisation non linéaire est dédiée à la simulation des lois de commande avant l'essai expérimental. Ainsi le simulateur fourni par ces modèles a permis de régler et de valider les différentes lois de commande

pour assurer la validation expérimentale et réduire les risques d'une mauvaise expérience (Abouzlam *et al.* (2012b, 2013a, 2014)).

Le tableau 2.3 résume les résultats des trois modélisations.

TABLE 2.3 – Différents modèles du pilote d'ozonation catalytique

Modèle	Transfert Oz_{out}/P	Transfert Abs/P
I	$Oz_{out}(s) = \frac{2.28}{s} + \frac{0.00010e^{-78.21s}}{0.00772+s}U(s)$	Non identifié
II	$Oz_{out}(s) = \frac{2.157}{s} + \frac{0.00006e^{-106.7s}}{0.0045+s}U(s)$	$Abs(s) = \frac{0.564}{s} - \frac{1.36 \cdot 10^{-6}e^{-200s}}{0.00027+s}U(s)$
III	$Oz_{out}(t) = -0.756 + 0.0239x(t) - 4.18 \cdot 10^{-5}x^2(t)$ avec $X(s) = G(s) \left(P(s) - \frac{160}{s} \right) + \frac{160}{s}$ $G(s) = \frac{e^{-119.5s}}{1+189.56s}$	$Abs(s) = \frac{0.564}{s} - \frac{1.36 \cdot 10^{-6}e^{-200s}}{0.00027+s}U(s)$

COMMANDE DU PROCÉDÉ

3.1 Introduction et objectifs

L'objectif principal dans ce projet d'optimisation du procédé d'ozonation catalytique est de réduire les coûts de fonctionnement. L'idée essentielle pour réaliser cet objectif est de maintenir l'absorbance autour d'une valeur donnée correspondant à un certain pourcentage d'abattement de polluant et de rejeter les perturbations qui peuvent intervenir durant le fonctionnement.

Un objectif secondaire, dans ces travaux de thèse à la frontière de l'automatique et du génie chimique, est de mettre à disposition des ingénieurs du traitement des eaux des outils de contrôle tirés de l'automatique moderne.

Pour atteindre ces objectifs, quatre implémentations, plus ou moins complexes dans leur mise au point, ont été testées. Dans cette présentation, ces implémentations sont classées dans deux catégories : la commande par hystérésis et la commande directe de l'absorbance *Abs*.

Les approches de commande par hystérésis, basées sur le contrôle de l'ozone dans les événements Oz_{out} , se justifient par leur simplicité de mise en œuvre. Dans la boucle de régulation, la consigne, que doit suivre la sortie contrôlée Oz_{out} , prend deux valeurs en fonction de l'évolution de l'absorbance *Abs* pour que celle-ci reste au voisinage de la valeur choisie correspondant à un abattement de DCO de 30 %.

Les approches de commande directe impliquent des boucles de régulation sur les deux sorties : l'ozone dans les événements Oz_{out} et l'absorbance *Abs*. L'approche est, cette fois, plus théorique mais la mise en œuvre offre de meilleures performances.

Trois méthodes de synthèse de correcteur sont étudiées : la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ .

Dans ce chapitre, les lois de commande développées sont validées aussi bien expérimentalement qu'en simulation grâce au modèle non linéaire identifié dans le paragraphe 2.3.6.

3.2 Description des approches développées

Dans cette section, les trois approches utilisées sont décrites, à savoir la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ .

3.2.1 Commande par modèle interne

La commande par modèle interne est une méthode classique pour le contrôle de système dynamique (Duvanaud *et al.* (2004); Friot (1995); Monroux (1999); Morari et Zafiriou (1989)). Elle a été initialement développée pour des applications de génie chimique (Sahaj et Yogesh (2012)). Le rejet de perturbation, la poursuite et la prise en compte du retard pur sont les points forts de cette méthode de contrôle. La simplicité de mise en œuvre et le fonctionnement intuitif rendent cette approche attractive pour des non-spécialistes de l'automatique.

3.2.1.1 Principe de la commande par modèle interne

Considérons un système $H(s)$ précédé d'un correcteur $C(s)$ en boucle ouverte, comme il est montré sur la figure 3.1.



FIGURE 3.1 – Commande en boucle ouverte

Si on souhaite que la sortie $s(t)$ du système suive parfaitement l'entrée $e(t)$, il faut que $C(s) = H^{-1}(s)$. En pratique, on ne dispose que du modèle $H_m(s)$ du système $H(s)$. On peut donc au mieux choisir le correcteur ainsi $C(s) = H_m^{-1}(s)$. Le modèle $H_m(s)$ présente systématiquement une erreur de modélisation et, par conséquent, n'est pas identique au système $H(s)$. De plus, il faut noter que la mesure de la sortie $s(t)$ est perturbée par une perturbation $d(t)$ que nous considérons additive en sortie. Le schéma de commande par modèle interne proposé est présenté sur la figure 3.2 où $C_{IMC}(s)$ est le correcteur défini ci-dessous¹.

Supposons, dans un premier temps, que $H_m(s) \rightarrow H(s)$ et que la perturbation $d(t)$ soit nulle. Le signal de rétroaction $w(t)$ est alors nul, et le schéma de la figure 3.2

¹IMC pour *Internal Model Control*

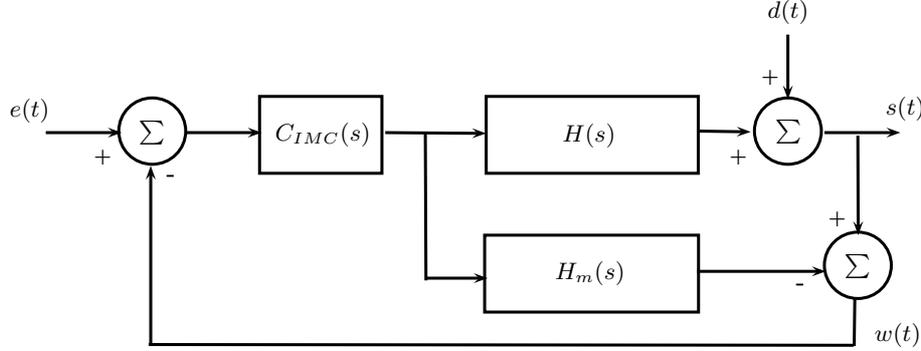


FIGURE 3.2 – Schéma de commande par modèle interne

se comporte comme le modèle de référence suivant fonctionnant en boucle ouverte

$$\begin{aligned} H_{ref}(s) &= C_{IMC}(s)H(s) \\ &= C_{IMC}(s)H_m(s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En fixant ce modèle de référence et en déterminant le correcteur comme suit

$$C_{IMC}(s) = H_m^{-1}(s)H_{ref}(s) \quad (3.2)$$

on peut choisir le comportement du système bouclé.

Le modèle de référence peut prendre la forme d'un filtre passe-bas pour diminuer les effets de la divergence entre le comportement du modèle $H_m(s)$ et le comportement du système réel $H(s)$ qui peut apparaître en haute fréquence (Morari et Zafiriou (1989)).

La sortie $s(t)$ du schéma de la figure 3.2 est donnée par

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{C_{IMC}(s)H(s)}{1 + C_{IMC}(s)(H(s) - H_m(s))} E(s) \\ &+ \frac{1 - C_{IMC}(s)H_m(s)}{1 + C_{IMC}(s)(H(s) - H_m(s))} D(s) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $X(s)$ est la transformée de Laplace du signal temporel $x(t)$.

En supposant que

$$H_{ref}(0) = C_{IMC}(0)H_m(0) = 1 \quad (3.4)$$

on a $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ même pour une perturbation de type échelon et un modèle $H_m(s)$ qui ne modélise pas très bien le système $H(s)$. La condition (3.4) est donc essentielle, et doit être vérifiée dans la méthode de commande par modèle interne.

3.2.1.2 Commande par modèle interne en présence d'un retard pur

Considérons maintenant un système $H(s)$ présentant un retard pur τ représenté comme suit

$$H(s) = e^{-\tau s} G(s) \quad (3.5)$$

Même si on suppose que $H_m(s) = H(s)$, il est impossible de construire le correcteur $C_{IMC}(s)$ car avec

$$C_{IMC}(s) = e^{\tau s} G^{-1}(s) H_{ref}(s) \quad (3.6)$$

on se heurte au problème de réalisation d'un circuit d'avance temporelle.

Par contre, si on considère que le modèle de référence est retardé de τ , soit

$$H_{ref} = e^{-\tau s} G_{ref}(s) \quad (3.7)$$

cela conduit à

$$C_{IMC}(s) = G^{-1}(s) G_{ref}(s) \quad (3.8)$$

qui est réalisable.

Si $H_m(s) \neq H(s)$, on aura

$$C_{IMC}(s) = G_m^{-1}(s) G_{ref}(s) \quad (3.9)$$

où

$$H_m(s) = e^{-\tau s} G_m(s) \quad (3.10)$$

L'application de la commande par modèle interne au procédé d'ozonation catalytique est décrite dans Abouzlam *et al.* (2012a). Le système est modélisé par un modèle de premier ordre comme suit

$$H_m(s) = e^{-\tau s} \frac{b_0}{s + a_0} \quad (3.11)$$

et le modèle de référence désiré est

$$H_{ref}(s) = e^{-\tau s} \frac{a_{0ref}}{s + a_{0ref}} \quad (3.12)$$

La condition (3.4) est bien vérifiée, et le correcteur est donc donné par

$$C_{IMC}(s) = \frac{a_{0ref}}{b_0} \frac{s + a_0}{s + a_{0ref}} \quad (3.13)$$

Les résultats sont fournis dans le paragraphe 3.3.1.1.

3.2.2 Commande optimale

3.2.2.1 Principe de la commande optimale

L'optimisation d'un système par la commande optimale consiste à résoudre le problème de contrôle tout en minimisant un critère proposé en fonction de l'objectif visé, et en vérifiant des conditions initiales et finales. Ce critère d'optimisation peut représenter, par exemple, le coût, le profit, le temps de parcours, etc. (Anderson et Moore (1989); Corriou (1996); Rachid et Mehdi (1997); Trélat (2005)).

Considérons le système dynamique représenté par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial, f est une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et l'état $x(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ exprime l'évolution dynamique.

Supposons maintenant que la fonction f dépend d'un signal $u(t)$ qui représente dans notre étude la commande, et que $u(t)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ainsi, l'équation différentielle s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & (t > 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

On constate que la trajectoire $x(t)$ dépend des conditions initiales du système et de la commande $u(t)$. Dans l'approche commande optimale, cette trajectoire, tout comme la commande, fait partie du critère d'optimisation. En d'autres termes, l'optimisation du système réside principalement dans la détermination de la bonne commande appelée commande optimale (Evans (2010)).

Supposons le système suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3.16)$$

Le critère quadratique prend généralement la forme suivante

$$J = M(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Theta(x, u, t) dt \quad (3.17)$$

Ce critère est soumis à la condition d'égalité (3.16) et aux contraintes suivantes sur l'état initial et final

$$L(x(t_0), t_0) = 0 \quad (3.18)$$

$$Z(x(t_1), t_1) = 0 \quad (3.19)$$

Les contraintes précédentes sont prises en considération dans le critère par l'approche de Lagrange. Pour cela, un autre critère est introduit

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & M(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Theta(x, u, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \lambda^T(t)(f - \dot{x}) dt \\ & + \mu^T L(x(t_0), t_0) + v^T Z(x(t_1), t_1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En considérant l'intégration par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda^T(t) \dot{x}(t) dt = [\lambda^T(t)x(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^T(t)x(t) dt \quad (3.21)$$

\tilde{J} peut être reformulé comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & M(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Theta(x, u, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \lambda^T(t) f dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}^T(t)x(t) dt \\ & - [\lambda^T(t)x(t)]_{t_0}^{t_1} + \mu^T L(x(t_0), t_0) + v^T Z(x(t_1), t_1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

En utilisant la fonction hamiltonienne donnée par

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \Theta(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)f(x(t), u(t), t) \quad (3.23)$$

le critère peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \int_{t_0}^{t_1} \left(H(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}^T(t)x(t) \right) dt - [\lambda^T(t)x(t)]_{t_0}^{t_1} \\ & + \mu^T L(x(t_0), t_0) + v^T Z(x(t_1), t_1) + M(x(t_1), t_1) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Supposons que $x^*(t)$ représente la trajectoire optimale des états et $u^*(t)$ représente la commande optimale, $x(t)$ et $u(t)$ peuvent être notés de la façon suivante

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) + \epsilon \delta_x(t) \\ u(t) &= u^*(t) + \epsilon \delta_u(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

où ϵ est un nombre positif très petit, $\delta_x(t)$ représente la variation de $x(t)$ autour de $x^*(t)$, et $\delta_u(t)$, la variation de $u(t)$ autour de $u^*(t)$ (Rachid et Mehdi (1997)).

Pour que le critère tende vers l'optimum, il faut que

$$\left. \frac{d\tilde{J}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (3.26)$$

La dérivée du critère peut être calculée en introduisant la série de Taylor de \tilde{J} autour de $(x^*(t), u^*(t))$ et en appliquant ensuite la dérivation par rapport à $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
H(x, u) &= H(x^*, u^*) + \frac{dH}{dx} \epsilon \delta_x + \frac{dH}{du} \epsilon \delta_u + 0(\epsilon) \\
\dot{\lambda}^T(t)x(t) &= \dot{\lambda}^T(t) (x^*(t) + \epsilon \delta_x(t)) + 0(\epsilon) \\
M(x(t_1), t_1) &= M(x^*(t_1), t_1) + \frac{dM}{dx(t_1)} \epsilon \delta_x(t_1) + 0(\epsilon) \\
[\lambda^T(t)x(t)]_{t_0}^{t_1} &= -\lambda^T(t_0) (x^*(t_0) + \epsilon \delta_x(t_0)) \\
&\quad + \lambda^T(t_1) (x^*(t_1) + \epsilon \delta_x(t_1)) + 0(\epsilon) \\
L(x(t_0), t_0) &= L(x^*(t_0), t_0) + \frac{dL}{dx(t_0)} \epsilon \delta_x(t_0) + 0(\epsilon) \\
Z(x(t_1), t_1) &= Z(x^*(t_1), t_1) + \frac{dZ}{dx(t_1)} \epsilon \delta_x(t_1) + 0(\epsilon)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

où $0(\epsilon)$ est un nombre très petit.

Alors, la dérivée de \tilde{J} par rapport à $\epsilon \rightarrow 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dH}{dx} + \dot{\lambda}(t) \right) \delta_x dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dH}{du} \delta_u dt + \left(\lambda(t_0) + \frac{dL^T}{dx(t_0)} \mu \right)^T \delta_x(t_0) \\
&+ \left(\frac{dM}{dx(t_1)} - \lambda(t_1) + \frac{dZ^T}{dx(t_1)} v \right)^T \delta_x(t_1) = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Lemme 3.1. - Lemme de Lagrange :

Soit $y(t)$ une fonction continue sur $[t_0, t_1]$. Si $\int_{t_0}^{t_1} y^T(t)x(t)dt = 0$ pour toutes fonctions continues $x(t)$, alors $y(t)$ est identiquement nulle sur $[t_0, t_1]$.

Selon la lemme de Lagrange, pour que la dérivée de \tilde{J} par rapport à ϵ soit égale à zéro, il faut

$$\frac{dH}{dx} = -\dot{\lambda}(t) \tag{3.29}$$

$$\frac{dH}{du} = 0 \tag{3.30}$$

$$\lambda(t_0) + \frac{dL^T}{dx(t_0)} \mu = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{dM^T}{dx(t_1)} - \lambda(t_1) + \frac{dZ^T}{dx(t_1)} v = 0 \tag{3.32}$$

Les deux équations (3.29) et (3.30) donnent les conditions d'optimalité. L'équation (3.31) représente la condition de transversalité pour l'état initial libre qui est soumis à la contrainte (3.18). Par contre, l'équation (3.32) donne la condition de

transversalité pour l'état final libre qui est soumis à la contrainte (3.19).

Dans le cas où l'instant final t_1 est libre, la condition suivante est ajoutée

$$H + \frac{dM}{dt} + v^T \frac{dZ}{dt} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (3.33)$$

Il faut noter aussi que pour savoir si l'optimum est minimum ou maximum, il faut étudier le signe de

$$\frac{d^2 \tilde{J}}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (3.34)$$

3.2.2.2 Commande optimale des systèmes linéaires invariants dans le temps

Soit le système linéaire invariant dans le temps défini par

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.35)$$

et le critère d'optimisation donné par

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_1) W x(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt \quad (3.36)$$

où W et Q sont des matrices constantes symétriques définies non négatives et R est une matrice constante symétrique définie positive.

On suppose que le temps final est fixé, donc la condition (3.33) ne sera pas prise en considération. L'état initial est également supposé fixe et sans contrainte pour ne pas prendre en compte les conditions (3.18) et (3.31). L'état final est supposé aussi sans contrainte, ce qui permet d'ignorer la condition (3.19). Par contre, l'état final est supposé libre, donc la condition suivante sera prise en considération

$$\left[\frac{dM}{dx} - \lambda(t) \right] \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (3.37)$$

Cette équation (3.37) est simplement déduite de l'équation (3.32) qui donne la condition de transversalité pour l'état final libre soumis à une contrainte.

Selon la définition (3.23), la fonction hamiltonienne pour le système linéaire (3.35) et le critère (3.36) est donné par

$$H = \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) + \lambda^T [Ax + Bu] \quad (3.38)$$

On applique les deux équations d'optimalité (3.29) et (3.30)

$$\frac{dH}{dx} = -\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + A^T\lambda(t) \quad (3.39)$$

$$\frac{dH}{du} = Ru(t) + B^T\lambda(t) = 0 \quad (3.40)$$

A partir de (3.40), on a

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) \quad (3.41)$$

Si on substitue l'équation (3.41) dans l'équation du système (3.35) qui exprime la condition d'égalité, on aura

$$\dot{x}(t) = Ax - BR^{-1}B^T\lambda(t) \quad (3.42)$$

Définissons un nouvel état augmenté

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

On a alors

$$\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} Z(t) = HZ(t) \quad (3.44)$$

où H est appelé la matrice hamiltonienne associée au système augmenté. L'équation (3.44) est liée à l'équation suivante de Riccati (Rachid et Mehdi (1997))

$$\dot{S}(t) = S(t)BR^{-1}B^T S(t) - S(t)A - A^T S(t) - Q \quad (3.45)$$

où

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (3.46)$$

A partir de (3.41) et (3.46), la commande optimale est donnée par

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)x(t) \quad (3.47)$$

Et donc, la résolution de (3.45) permet de calculer la commande optimale.

Pour la condition de transversalité pour l'état final supposé libre, il faut vérifier l'équation (3.37). Or

$$M = \frac{1}{2}x^T(t_1)Wx(t_1) \quad (3.48)$$

Etant donné (3.46) et (3.48), pour vérifier la condition de transversalité (3.37), on en déduit que l'équation de Riccati doit être résolue sous la condition suivante

$$S(t_1) = W \quad (3.49)$$

sachant que cette condition (3.49) rend le critère optimal égal à la valeur suivante (Rachid et Mehdi (1997))

$$\tilde{J}^* = \frac{1}{2}x(t_0)S(t_0)x(t_0) \quad (3.50)$$

3.2.2.3 Commande optimale à horizon infini

Soit le critère d'optimisation à horizon infini défini par

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (3.51)$$

et la commande optimale correspondante donnée par

$$u(t) = -R^{-1}B^T Sx(t) \quad (3.52)$$

S est la solution de l'équation suivante

$$SBR^{-1}B^T S - SA - A^T S - Q = 0 \quad (3.53)$$

qui peut être résolue en utilisant la fonction `care` sous Matlab.

Soulignons que la commande obtenue est une commande par retour d'état de la forme $u(t) = -Kx(t)$ où le gain du retour d'état K est donné par

$$K = R^{-1}B^T S \quad (3.54)$$

3.2.2.4 Commande optimale en présence d'un intégrateur

Si l'objectif de la commande est de réaliser une poursuite de trajectoire de type échelon, un intégrateur est considéré dans la chaîne directe. On applique alors les outils précédents pour calculer la commande optimale mais avec un nouveau système augmenté pour considérer l'intégrateur. La figure 3.3 montre un système en boucle fermée où K est le gain du retour d'état et K_i est un gain sur la chaîne intégrateur.

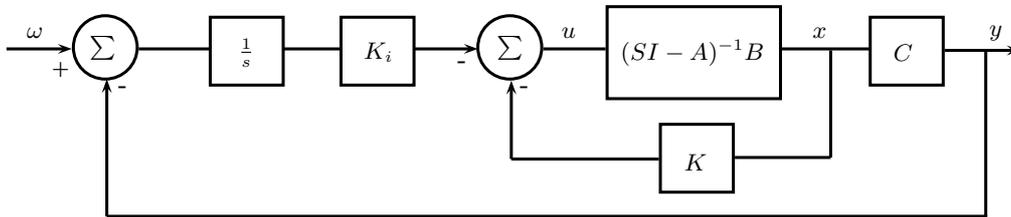


FIGURE 3.3 – Commande optimale avec action intégrale

La commande u est donnée par

$$u = -Kx - K_i \int_0^t (\omega(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (3.55)$$

Le système dynamique est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.56)$$

Notons z la variable définie par $\dot{z} = \omega - y$. La commande peut être alors exprimée comme suit

$$u = - \begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

et donc considérée comme un retour d'état sur le système augmenté suivant (Rachid et Mehdi (1997))

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.58)$$

Le système augmenté (3.58) est considéré pour calculer le gain $\begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix}$.

3.2.3 Synthèse H_∞

3.2.3.1 Principe de la commande H_∞

La commande H_∞ est une des techniques importantes utilisées pour concevoir le contrôle robuste d'un système dynamique. Elle a été développée dans les années 80, et de nombreux travaux récents (Doyle *et al.* (1989); Foias *et al.* (1991); Green et Limebeer (1995); Gu *et al.* (2005); Stoorvogel (1992); Zhou *et al.* (1996)).

L'approche H_∞ a pour objectif de concevoir un contrôle qui assure la stabilité interne tout en vérifiant les performances souhaitées pour le système, c'est-à-dire le rejet des perturbations, la poursuite de la consigne par la sortie du système et la limitation de l'énergie de la commande.

Supposons que le système en boucle fermée puisse être formulé sous la forme décrite sur la figure 3.4. Le signal w représente les entrées exogènes qui peuvent être des perturbations à rejeter et/ou des entrées de consigne à suivre. z représente les sorties pondérées du système bouclé, e , les signaux mesurables, et u , les entrées de commande. Pour généraliser, le système est ici représenté par sa matrice de transfert $P(s)$ définie par

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ E(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Le principe de la synthèse H_∞ consiste à calculer une loi de commande $u = K(s)e$ qui stabilise le système bouclé et minimise l'impact des variations de w sur les sorties pondérées z (Gu *et al.* (2005); Stoorvogel (1992)). La minimisation de la norme H_∞ du transfert entre z et w permet de considérer le pire cas.

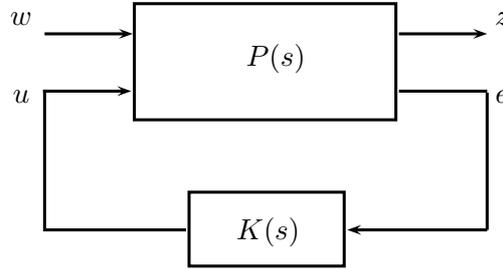


FIGURE 3.4 – Problème sous forme standard

Définissons $\mathcal{F}(P, K)$ comme la fonction de transfert en boucle fermée entre z et w , également appelée transformée linéaire fractionnaire (LFT) de P et de K

$$\mathcal{F}(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (3.60)$$

Ainsi, l'approche H_∞ se formule comme suit.

Problème 3.1. *Le problème H_∞ consiste à minimiser la norme H_∞ de $\mathcal{F}(P, K)$ sur l'ensemble des correcteurs $K(s)$ qui stabilisent le système.*

La détermination de la norme H_∞ se base sur l'étude des valeurs singulières du transfert.

3.2.3.2 Valeurs singulières

Soit une matrice $T \in D^{m \times n}$. Les valeurs singulières de cette matrice sont les racines carrées des valeurs propres du produit TT^* , si $m \leq n$, ou du produit T^*T , si $m \geq n$, soit

$$\begin{aligned} \sigma_i(T) &= \sqrt{\lambda_i(TT^*)} & \text{si } m \leq n \\ \sigma_i(T) &= \sqrt{\lambda_i(T^*T)} & \text{si } m \geq n \end{aligned} \quad (3.61)$$

où λ_i est la i -ème valeur propre, et T^* , la matrice transposée et conjuguée de T .

Les valeurs singulières sont des réels non négatifs, et le nombre des valeurs singulières strictement positives représente le rang de la matrice T . Les valeurs singulières donnent des informations sur la matrice T , et les valeurs les plus grandes sont prédominantes par rapport aux plus faibles. On note $\bar{\sigma}(T)$ la valeur singulière maximale et $\underline{\sigma}(T)$ la valeur singulière minimale.

D'où, si l'on veut trouver le gain maximal du système $T(j\omega)$ à la fréquence correspondante, il suffit de déterminer la valeur maximale de $\bar{\sigma}(T)$.

3.2.3.3 Norme H_∞ d'un système

La norme H_∞ d'un système, représenté par une matrice de transfert $T(j\omega)$, est la valeur maximale du gain du système sur l'ensemble des pulsations (voir la figure 3.5). Selon le paragraphe précédent, la norme H_∞ est donc la valeur maximale de $\bar{\sigma}(T(j\omega))$, et est définie par

$$\|T(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T(j\omega)) \quad (3.62)$$

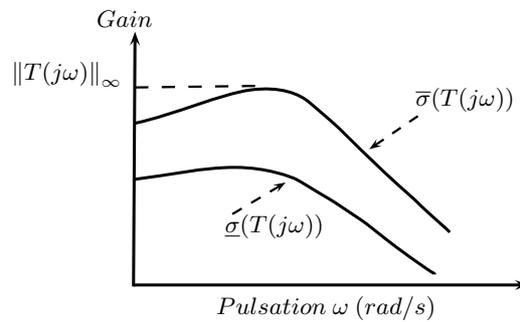


FIGURE 3.5 – Valeurs singulières maximale et minimale et norme H_∞

En d'autres termes, la norme H_∞ d'un système représente le plus fort gain entre l'énergie en entrée et l'énergie en sortie. D'où, le fait de minimiser cette norme entraîne la minimisation des effets des entrées exogènes du système sur les sorties et la réalisation de performances importantes.

3.2.3.4 Problème de sensibilité mixte

Considérons le problème de sensibilité mixte, cas particulier du problème H_∞ (Stoorvogel (1992)).

Soit le schéma de contrôle décrit par la figure 3.6.

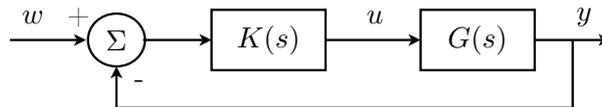


FIGURE 3.6 – Système en boucle fermée

Il existe un certain nombre de fonctions, dites fonctions de sensibilité, permettant d'analyser les performances du système en boucle fermée. Citons :

- la fonction de sensibilité en sortie (output sensitivity function)

$$S_y(s) = \frac{W(s) - Y(s)}{W(s)} = (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (3.63)$$

- la fonction de sensibilité complémentaire en sortie

$$T_y(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \quad (3.64)$$

- la fonction de sensibilité en commande (control sensitivity function)

$$T_u(s) = \frac{U(s)}{W(s)} = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \quad (3.65)$$

Ainsi, une faible valeur de la norme H_∞ de $S_y(s)$ exprime de bonnes propriétés de poursuite alors qu'une faible valeur de la norme H_∞ de $T_u(s)$ représente une commande de faible amplitude. Le problème H_∞ consiste donc à trouver un correcteur $K(s)$ qui assure la stabilité interne et qui offre un bon compromis entre plusieurs fonctions de sensibilité.

Il est important de noter qu'il est impossible de bien poursuivre un signal de consigne à très haute fréquence. De plus, le modèle utilisé représente le système seulement dans une bande de fréquence limitée par les capteurs et les actionneurs. Il est donc illusoire de vouloir résoudre le problème H_∞ en considérant une borne uniforme sur toutes les fréquences. Par conséquent, des fonctions de pondération permettent de concentrer l'effort de régulation sur les bandes fréquentielles souhaitées (Stoorvogel (1992)).

Soit le schéma de contrôle avec les fonctions de pondération fréquentielle décrit par la figure 3.7. Ce schéma est mis sous une forme faisant apparaître la matrice de transfert $P(s)$ présentée dans la figure 3.4. Les matrices de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ permettent de fixer les performances souhaitées.

Supposons que $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$. Alors, la matrice de transfert $P(s)$ définie dans (3.59) devient

$$P : \left(\begin{array}{c|c} W_1 & -W_1G \\ \mathbf{0} & W_2 \\ \mathbf{0} & W_3G \\ \hline \mathbf{I} & -G \end{array} \right) \quad (3.66)$$

De même, en considérant les définitions (3.63), (3.64) et (3.65), la fonction de transfert en boucle fermée entre z et w , définie par (3.60), devient

$$\mathcal{F}(P, K) : \left(\begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 T_u \\ W_3 T_y \end{array} \right) \quad (3.67)$$

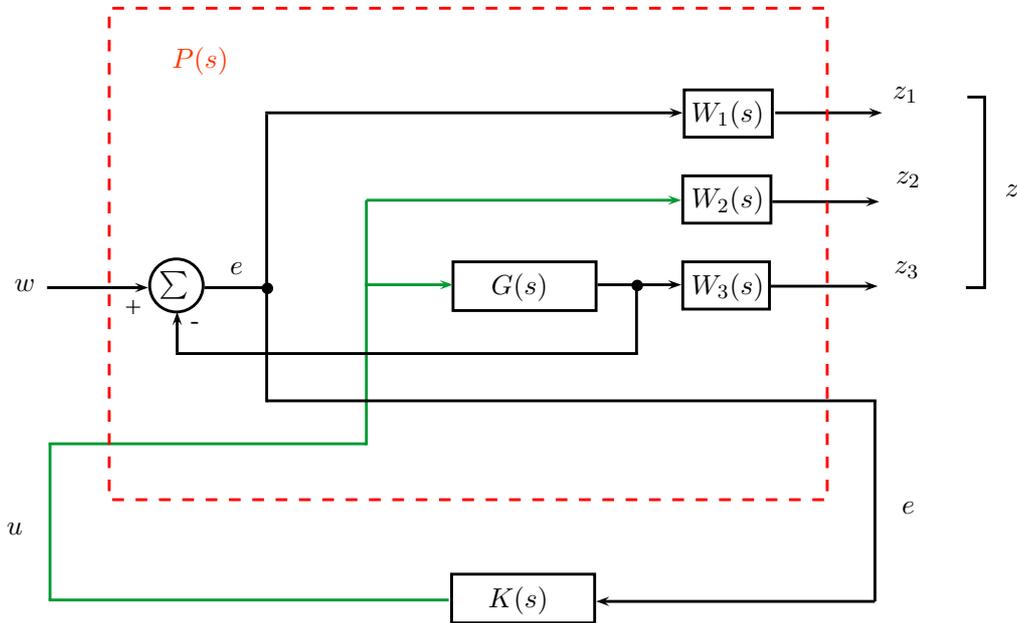


FIGURE 3.7 – Système en boucle fermée avec les fonctions de pondération

Ainsi, l'approche H_∞ et le problème 3.1 peuvent être reformulés sous la forme du problème de sensibilité mixte suivant (Chiang et Safonov (1992); Kwakernaak (1993)).

Problème 3.2. *Le problème de sensibilité mixte consiste à trouver un correcteur $K(s)$ qui assure la stabilité interne et qui vérifie*

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S_y \\ W_2 T_u \\ W_3 T_y \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (3.68)$$

On peut noter que :

- La minimisation de $\|S_y\|_\infty$ revient à réaliser la poursuite et le rejet des perturbations en sortie. La pondération fréquentielle $W_1(s)$ permet de déterminer, par exemple, les fréquences auxquelles les perturbations sont rejetées : le gain élevé de $W_1(s)$ permet de rejeter les perturbations de basses fréquences. La pondération $W_1(s)$ est généralement choisie comme un filtre passe bas du premier ordre (Beaven *et al.* (1996)).
- Le fait de minimiser $\|T_u\|_\infty$, qui représente la norme de la fonction de transfert w vers u , permet de limiter l'énergie de commande et donc la fatigue des actionneurs. Le choix de la pondération $W_2(s)$ se limite souvent à un scalaire qui permet d'agir sur la dynamique du signal de commande (Gu *et al.* (2005)).

- La minimisation de $\|T_y\|_\infty$, sous la contrainte $S_y + T_y = I$, permet de rejeter les bruits de mesure. La pondération $W_3(s)$ permet d'accentuer la pente de l'atténuation en haute fréquence de T_y .

Le choix des pondérations fréquentielles est très important car elles expriment les performances du système bouclé. Citons, par exemple, les références suivantes Asgharian et Tavakoli (1996); Beaven *et al.* (1996); Skogestad et Postlethwaite (1996) pour guider ce choix.

3.2.3.5 Résolution du problème

Le système représenté par $P(s)$ sur les figures 3.4 et 3.7 est un système augmenté tenant compte des matrices de pondération. Considérons que ce système augmenté est décrit par la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aug}(t) &= A_{aug}x_{aug}(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x_{aug}(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ e(t) &= C_e x_{aug}(t) + D_{ew} w(t) + D_{eu} u(t) \end{aligned} \quad (3.69)$$

ou par la formulation suivante

$$P(s) : \left(\begin{array}{c|cc} A_{aug} & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \end{array} \right) \quad (3.70)$$

Considérons également que le correcteur $K(s)$ a la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ainsi, la matrice de transfert $\mathcal{F}(P, K)$ en boucle fermée entre z et w admet la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_{inf}(t) &= A_{inf} x_{inf}(t) + B_{inf} w(t) \\ z(t) &= C_{inf} x_{inf}(t) + D_{inf} w(t) \end{aligned} \quad (3.72)$$

avec $x_{inf} = [x_{aug} \quad x_c]^T$.

En considérant l'hypothèse $D_{eu} = \mathbf{0}$, (3.72) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\mathcal{F}(P, K) : \left(\begin{array}{c|cc} A_{inf} & B_{inf} & \\ \hline C_{inf} & D_{inf} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} A_{aug} + B_u D_c C_e & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{ew} \\ B_c C_e & A_c & B_c D_{ew} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_e & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{ew} \end{array} \right) \quad (3.73)$$

L'objectif principal est de calculer le correcteur $K(s)$ qui assure la stabilité interne et une norme H_∞ de $\mathcal{F}(P, K)$ strictement inférieure à une valeur positive γ ($\gamma < 1$ pour un correcteur robuste).

Il existe différentes techniques de résolution du problème H_∞ (Doyle *et al.* (1989); Green et Limebeer (1995); Zhou *et al.* (1996)). La résolution par les techniques LMI (Linear Matrix Inequalities) (Gahinet et Apkarian (1994)) offre les meilleures performances calculatoires. Dans les techniques LMI, citons l'approche basée sur le lemme borné réel qui indique que l'objectif recherché est atteint s'il existe une matrice symétrique définie positive X_∞ telle que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée

$$\begin{bmatrix} A_{inf}X_\infty + X_\infty A_{inf}^T & B_{inf} & X_\infty C_{inf}^T \\ B_{inf}^T & -\gamma \mathbf{I}_w & D_{inf}^T \\ C_{inf}X_\infty & D_{inf} & -\gamma \mathbf{I}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.74)$$

où \mathbf{I}_w et \mathbf{I}_z sont des matrices identités adaptées.

Des techniques d'optimisation peuvent être utilisées pour calculer le correcteur en synthèse H_∞ . Ces techniques peuvent être la solution de problème BMI (bilinear matrix inequality) généralement rencontré si le correcteur est structuré. Sous Matlab, la fonction `hinfstruct.m`, basée sur la technique d'optimisation développée par Apkarian et Noll (2006), sera utilisée ultérieurement.

3.3 Applications

La commande du procédé d'ozonation catalytique doit fournir un traitement des eaux résiduaires respectant les objectifs de rejet tout en réduisant la quantité d'oxygène consommée. Actuellement, le système fonctionne en boucle ouverte avec une quantité d'ozone en entrée excessive, et par conséquent, une surconsommation d'oxygène. Dans notre étude, pour atteindre l'objectif de commande, l'absorbance, bon indicateur de la DCO des eaux polluées, sera contrôlée. Une valeur d'absorbance de 0.5, qui correspond dans notre cas à un abattement d'environ 30% de la DCO initiale comme il l'a été décrit dans le chapitre 1, sera considérée comme la norme de rejet à atteindre.

Au début de chaque essai expérimental, le procédé fonctionne en boucle ouverte jusqu'au moment où l'absorbance atteint la valeur de 0.5. A partir de cet instant, le système fonctionne en boucle fermée pour conserver une valeur d'absorbance proche de 0.5. Les schémas Simulink des commandes implémentées sont présentés dans l'annexe B.

Le fil conducteur des applications décrites dans ce paragraphe est d'appliquer des outils de commande au pilote d'ozonation catalytique, afin de démontrer l'utilité

de ces outils dans l'optimisation des procédés d'oxydation avancée. Quatre implémentations ont été testées. La présentation ci-dessous de ces applications respecte l'ordre chronologique des implémentations, mais elle respecte surtout un degré de complexité, ainsi qu'un degré de performance, croissant. Les deux premières applications se classent dans les approches de commande par hystérésis, et les deux dernières, dans les approches de commande directe.

3.3.1 Commande par hystérésis de l'absorbance Abs

La figure 3.8 représente le schéma de commande par hystérésis de l'absorbance. La commande est la puissance P de l'ozoneur. La sortie contrôlée est l'ozone dans les événements Oz_{out} . L'objectif est de garder un abattement de DCO autour de 30% qui correspond à une valeur d'absorbance de 0.5. Dans ce schéma, l'absorbance mesurée permet de fournir une consigne Oz_{in} haute ou basse à la boucle de régulation de l'ozone dans les événements Oz_{out} . Une hystérésis permet le passage de la consigne basse à la consigne haute au seuil de $Abs = 0.5$. Le passage de la consigne haute à la consigne basse s'effectue pour un seuil inférieur de Abs .

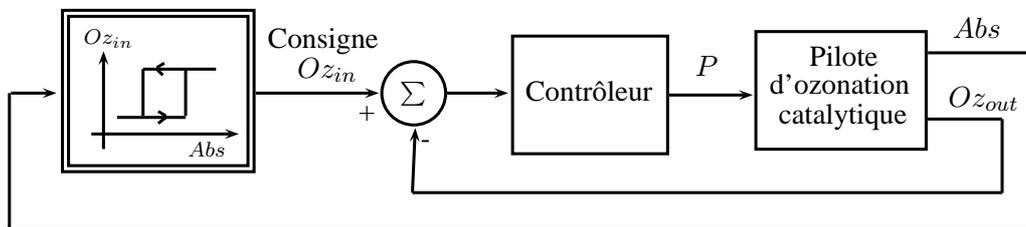


FIGURE 3.8 – Schéma de commande par hystérésis

Ce schéma de commande par hystérésis a été testé avec les approches de commande par modèle interne et de commande optimale de l'ozone dans les événements Oz_{out} . Pour chacune des approches, une validation expérimentale et une validation en simulation sont présentées.

3.3.1.1 Application de la commande par modèle interne (Abouzlam *et al.* (2012a))

A- Synthèse du correcteur

L'implémentation de cette commande se base sur le modèle I présenté dans le

tableau 2.3. Rappelons le modèle estimé du transfert Oz_{out}/P

$$Oz_{out}(s) = \frac{2.28}{s} + \frac{0.00010e^{-78.21s}}{0.00772 + s}U(s) \quad (3.75)$$

où

$$u(t) = P(t) - P(0) \quad (3.76)$$

Comme il a été expliqué précédemment, le contrôle commence quand le système arrive au point de fonctionnement $Abs = 0.5$. Par conséquent, la synthèse du correcteur se fait en considérant, pour modèle interne du transfert Oz_{out}/P , le modèle suivant

$$Y_1(s) = H_m(s)U(s) \quad (3.77)$$

où

$$y_1(t) = Oz_{out}(t) - 2.28$$

$$H_m(s) = \frac{0.00010e^{-78.21s}}{0.00772 + s} \quad (3.78)$$

Dans cette application, la boucle fermée, et donc le contrôle de l'absorbance, débute à l'instant de 5000 s. Cet instant correspond à une valeur de l'absorbance proche de 0.5, et à une valeur de l'ozone dans les événements Oz_{out} à un état d'équilibre.

Le schéma de commande par modèle interne du pilote d'ozonation catalytique est présenté sur la figure 3.9. La justification du choix des valeurs de l'entrée de consigne $e(t)$ est fournie ultérieurement.

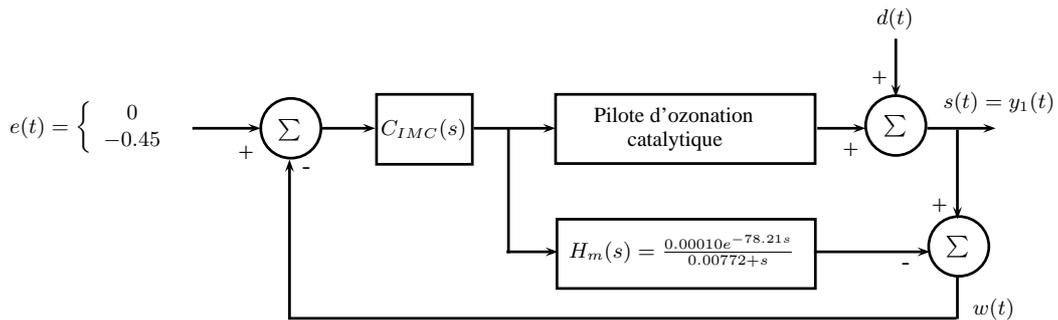


FIGURE 3.9 – Commande par hystérésis avec la commande par modèle interne

Comme il a été présenté dans le paragraphe 3.2.1, le correcteur $C_{IMC}(s)$ est obtenu par la relation suivante

$$C_{IMC}(s) = H_m^{-1}(s)H_{ref}(s) \quad (3.79)$$

sous la condition, permettant la poursuite par la sortie $s(t)$ de la consigne $e(t)$, donnée par

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_{ref}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} C_{IMC}(s)H_m(s) = 1 \quad (3.80)$$

La constante du temps du modèle estimé $H_m(s)$ est de 129.6 s. L'objectif de cette première application est de vérifier le comportement en boucle fermée du pilote. Il n'est pas recherché de performance en terme de rapidité, et donc la constante de temps souhaitée pour le système bouclé est fixée à 125 s. Par conséquent, le modèle de référence H_{ref} est choisi comme suit

$$H_{ref} = \frac{e^{-78.21s}}{1 + 125s} \quad (3.81)$$

Selon la relation (3.79), le correcteur est donc donné par

$$C_{IMC}(s) = \frac{0.00772 + s}{0.00010(1 + 125s)} \quad (3.82)$$

B- Résultats expérimentaux

Pour la commande par hystérésis présentée dans la figure 3.8, le choix des valeurs haute et basse de la consigne Oz_{in} est délicat. Ces valeurs doivent permettre de faire varier l'absorbance Abs de part et d'autre de la valeur recherchée 0.5. Ces deux valeurs sont choisies à partir de l'évolution de l'absorbance par rapport à l'ozone dans les événements Oz_{out} présentée dans la figure 2.8, à savoir :

- Une consigne Oz_{in} haute égale à 2.28 V jusqu'à ce que l'absorbance Abs devienne inférieure au seuil de 0.43. Dans le schéma de la figure 3.9, la consigne haute considérée est donc $e(t) = 0$ puisque $y_1(t) = Oz_{out}(t) - 2.28$.
- Une consigne Oz_{in} basse égale à 1.83 V jusqu'à ce que l'absorbance Abs devienne supérieure au seuil de 0.5, soit une consigne basse $e(t)$ égale à -0.45 sur la figure 3.9.

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 3.10.

Le test est divisé en deux parties :

- La première partie concerne le fonctionnement du pilote en boucle ouverte avec une puissance P constante de 160W jusqu'à l'instant de 5000 s pour arriver à un point de fonctionnement voisin d'une absorbance à 0.5.
- La deuxième partie présente le pilote en boucle fermée.

On peut observer que l'ozone dans les événements poursuit bien la consigne demandée et que l'absorbance est régulée autour de la valeur souhaitée de 0.5. Ainsi, la puissance reste dans la gamme [110 W, 170 W].

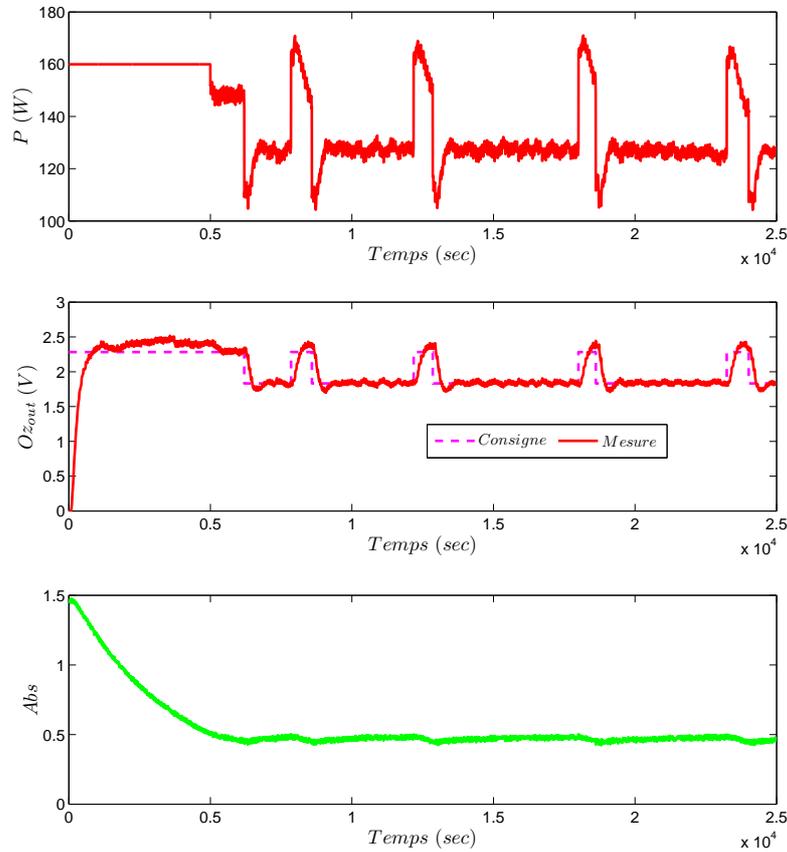


FIGURE 3.10 – Résultats de la commande par hystérésis de Abs avec l'approche commande par modèle interne

Remarque 3.1. Notons que, après la mise en boucle fermée, l'entrée de commande P est perturbée. Ceci s'explique par le bouclage et la mesure bruitée de l'ozone dans les événements Oz_{out} .

C- Simulation à partir du modèle non linéaire

L'objectif de cette simulation *a posteriori* est de valider en boucle fermée le modèle non linéaire, modèle III du tableau 2.3. La simulation en boucle fermée à partir de ce modèle non linéaire sera utile dans les autres approches de commande. Effectivement, si en commande par modèle interne, la synthèse du correcteur est aisée et se limite au choix du modèle de référence $H_{ref}(s)$, en commande optimale ou en commande H_∞ , le choix des paramètres de réglage des correcteurs est plus délicat. Dans ce cas, la simulation *a priori* du système en boucle fermée permettra de comparer différents réglages en amont de l'essai expérimental.

La simulation consiste donc à remplacer le bloc *Pilote d'ozonation catalytique* dans le schéma de la figure 3.9 par le modèle non linéaire du transfert Oz_{out}/P défini par

$$\begin{aligned} Oz_{out}(t) &= -0.756 + 0.0239x(t) - 4.18 \cdot 10^{-5}x^2(t) \\ \text{avec } X(s) &= G(s) \left(P(s) - \frac{160}{s} \right) + \frac{160}{s} \\ G(s) &= \frac{e^{-119.5s}}{1 + 189.56s} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Concernant le signal d'absorbance, nous considérons le signal mesuré dans l'essai expérimental présenté dans la figure 3.10. Ainsi, les mêmes instants de commutation d'une consigne haute à une consigne basse, et vice versa, sont obtenus entre l'essai expérimental et la simulation.

Les conditions initiales de la simulation sont celles obtenues sur l'essai expérimental à l'instant de mise en fonctionnement de la boucle fermée.

La figure 3.11 montre une comparaison des signaux simulés et mesurés. Pour l'ozone dans les événements, on constate que les sorties simulée et mesurée se superposent. Pour la commande P , un écart constant apparaît entre la valeur expérimentale et la valeur simulée. Cet écart se justifie par une erreur en régime permanent du modèle non linéaire ; des explications sont données dans les remarques ci-dessous. Malgré cette imprécision, on peut conclure que la simulation à partir du modèle non linéaire reflète bien le comportement dynamique du pilote en boucle fermée. Ce simulateur peut donc être utilisé pour les prochaines synthèses de correcteurs.

Remarque 3.2. *Une erreur d'implémentation a été faite. Effectivement, à l'instant 5000 s, la boucle fermée est appliquée en considérant la sortie $y_1(t) = Oz_{out}(t) - 2.28$. Comme l'hypothèse du régime permanent est faite à cette instant, il aurait fallu considérer $y_1(t) = Oz_{out}(t) - Oz_{out}(5000)$ avec $Oz_{out}(5000) = 2.38$. Cette erreur a été corrigée dans les autres essais.*

Par cohérence, la simulation a été réalisée en introduisant cette différence comme perturbation constante, c'est-à-dire $d(t) = 2.38 - 2.28 = 0.1$.

Remarque 3.3. *Etudions le régime permanent de la commande. La commande par modèle interne est donnée par la relation suivante (voir figure 3.9)*

$$U(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 + C_{IMC}(s)H(s) - C_{IMC}(s)H_m(s)} (E(s) - D(s)) \quad (3.84)$$

avec $H(s) = Oz_{out}(s)/U(s)$ et $U(s) = P(s) - \frac{160}{s}$ définis à partir de (3.83).

En régime permanent, puisque

$$C_{IMC}(0)H_m(0) = 1 \quad (3.85)$$

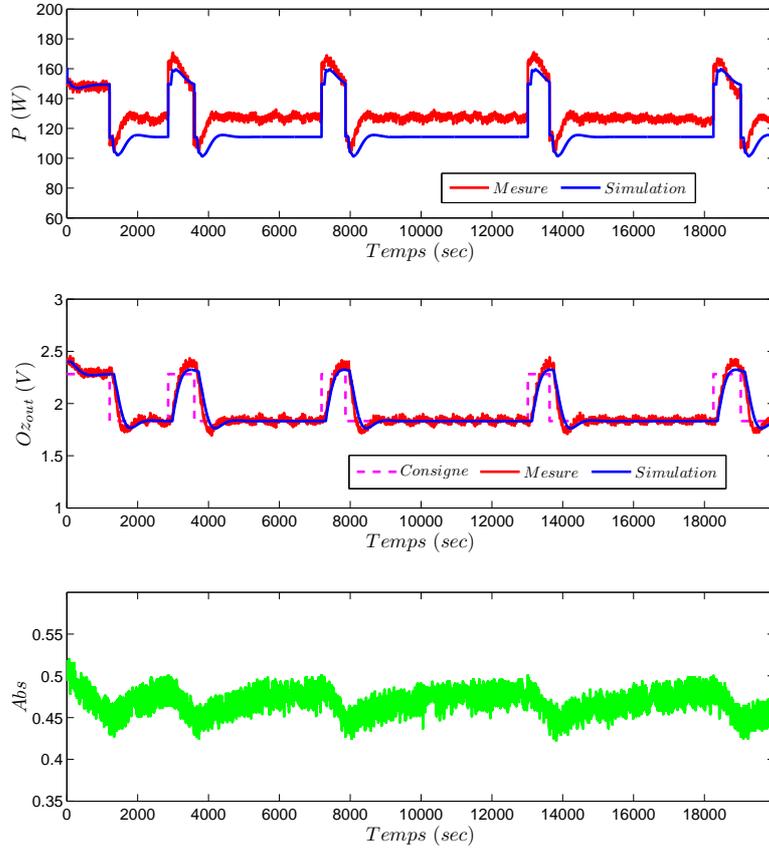


FIGURE 3.11 – Résultats simulés et expérimentaux

la relation (3.84) devient

$$H(0)U(0) = E(0) - D(0) \quad (3.86)$$

Or $e(t) \in (0, -0.45)$ et $d(t) = 0.1$, d'où $H(0)U(0) \in (-0.1, -0.55)$. La figure 3.12 représente la caractéristique statique $H(0)U(0)$ en fonction $U(0)$ du modèle non linéaire $H(s)$ défini par (3.83) autour du point de fonctionnement. Pour une variation de $H(0)U(0) \in (-0.1, -0.55)$, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \in (-10.8, -45.7)$, soit les valeurs simulées de la commande P en régime permanent (149.2 W, 114.3 W), valeurs qu'on retrouve sur la figure 3.11.

On peut conclure que le modèle non linéaire présente une erreur statique qui entraîne cet écart sur la commande.

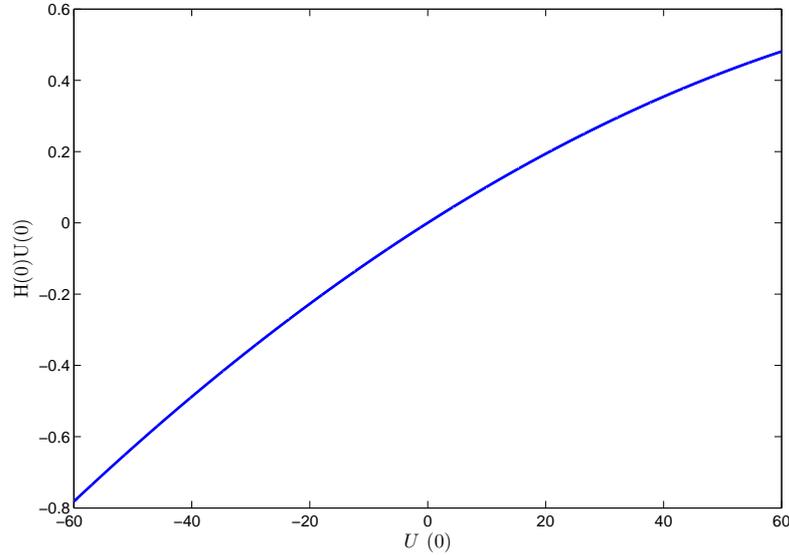


FIGURE 3.12 – Caractéristique statique du modèle non linéaire autour du point de fonctionnement

3.3.1.2 Application de la commande optimale (Abouzlam *et al.* (2013b))

A- Synthèse du correcteur

L'application repose ici sur l'utilisation de la technique de la commande optimale pour calculer le correcteur du schéma de commande par hystérésis donné dans la figure 3.8.

Cette implémentation se base sur le modèle II, présenté dans le tableau 2.3, suivant

$$\begin{aligned} Oz_{out}(s) &= \frac{2.157}{s} + \frac{0.00006e^{-106.7s}}{0.0045 + s} U(s) \\ Abs(s) &= \frac{0.564}{s} - \frac{1.36 \cdot 10^{-6} e^{-200s}}{0.00027 + s} U(s) \end{aligned} \quad (3.87)$$

En considérant les variations autour d'un point de fonctionnement, ce modèle peut être reformulé sous la forme d'une représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.88)$$

où

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Oz_{out}(t) - Oz(0) \\ Abs(t) - 0.5 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \\ u(t) &= P(t) - P(0), \quad A = \begin{bmatrix} -0.0045 & 0 \\ 0 & -0.00027 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.00006 \\ -1.36 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Le point de fonctionnement considéré est donné par les valeurs $Oz(0)$ et $P(0)$ à l'instant initial de la boucle fermée, instant noté $t = 0$. Les variations de l'absorbance sont observées par rapport à la valeur de consigne recherchée, à savoir 0.5. Les retards purs ne sont pas considérés dans la synthèse du correcteur. Une analyse de la stabilité de la boucle fermée vis-à-vis de cette omission est présentée ultérieurement.

Le schéma de la commande par hystérésis avec la commande optimale du pilote d'ozonation catalytique est présenté sur la figure 3.13.

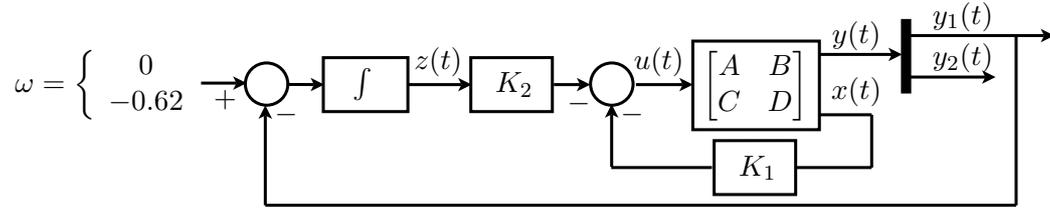


FIGURE 3.13 – Commande par hystérésis avec la commande optimale

Rappelons les objectifs de la synthèse par l'approche de la commande optimale énoncés dans le paragraphe 3.2.2.1 :

- Le premier objectif est la poursuite de la consigne Oz_{in} par la sortie Oz_{out} , qui conduit à maintenir l'absorbance autour de la valeur 0.5 correspondant à un abattement de DCO de 30 %, comme indiqué dans la figure 3.8. Cette poursuite peut être obtenue par l'action intégrale $K_2 \int (Oz_{out}(\tau) - Oz_{in}) d\tau$.
- Le deuxième objectif est la minimisation d'une fonction coût, en l'occurrence ici

$$J = \int_0^{\infty} (Oz_{out}^2(t) + \alpha P^2(t)) dt \quad (3.90)$$

fonction de la consommation électrique et de l'ozone en excès dans les événements. Cette minimisation est réalisée en appliquant les outils de la technique de commande optimale décrite dans Anderson et Moore (1989); Rachid et Mehdi (1997).

Selon le schéma présenté sur la figure 3.13, la loi de commande est donnée par

$$u(t) = -K_1 x(t) - K_2 \int (\omega - y_1(\tau)) d\tau \quad (3.91)$$

qui peut être reformulée sous forme du retour d'état suivant

$$u(t) = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

où $\dot{z}(t) = \omega - y_1(t)$.

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Le système en boucle fermée peut alors être écrit sous la forme suivante

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.94)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Avec l'objectif d'une régulation de l'absorbance autour de la valeur de 0.5, la question de la commande optimale à horizon infini est considérée. Dans ce cas, la résolution du problème de commande optimale repose sur la minimisation du critère quadratique suivant

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (3.96)$$

où Q est une matrice définie positive et R est un scalaire strictement positif.

Comme il a été dit dans le paragraphe 3.2.2.3, la minimisation de J est obtenue pour la loi de commande suivante

$$u(t) = -R^{-1}\tilde{B}^T S\tilde{x}(t) \quad (3.97)$$

où la matrice S , définie positive, est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante

$$S\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T S - S\tilde{A} - \tilde{A}^T S - Q = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

Il est déduit de (3.92) et (3.97) que

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = R^{-1}\tilde{B}^T S \quad (3.99)$$

Il est bien clair que Q et R caractérisent la dynamique du système en boucle fermée. Différents réglages ont été testés en simulation en considérant le modèle non linéaire. Les tests les plus significatifs sont présentés dans le paragraphe suivant.

B- Simulation à partir du modèle non linéaire

L'objectif ici est de tester plusieurs réglages de correcteur $[K_1 \ K_2]$ obtenus pour différentes valeurs de Q et R . Le simulateur correspond au schéma de commande présenté dans la figure 3.13 où le modèle linéaire (A, B, C, D) est remplacé par le modèle non linéaire III du tableau 2.3.

Considérons trois réglages différents conduisant à une dynamique de la boucle fermée :

- lente

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad R = 1/0.025 \quad (3.100)$$

$$K_1 = [19.6485 \ 0], \quad K_2 = -0.1 \quad (3.101)$$

- rapide

$$Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad R = 1/0.3 \quad (3.102)$$

$$K_1 = [85.0792 \ 0], \quad K_2 = -0.6 \quad (3.103)$$

- intermédiaire

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 1/0.11 \quad (3.104)$$

$$K_1 = [40.9414 \ 0], \quad K_2 = -0.2345 \quad (3.105)$$

Les résultats de simulation de la boucle fermée avec les trois réglages, dits lent, rapide et intermédiaire, sont présentés dans les figures 3.14, 3.15 et 3.16, respectivement.

On observe que le réglage lent entraîne une réponse lente inacceptable pour une application industrielle. Par contre, avec le réglage rapide, la réponse commence à osciller, et on risque l'instabilité. Par conséquent, l'essai expérimental présenté ultérieurement est implémenté avec le réglage intermédiaire qui offre le meilleur compromis stabilité-rapidité.

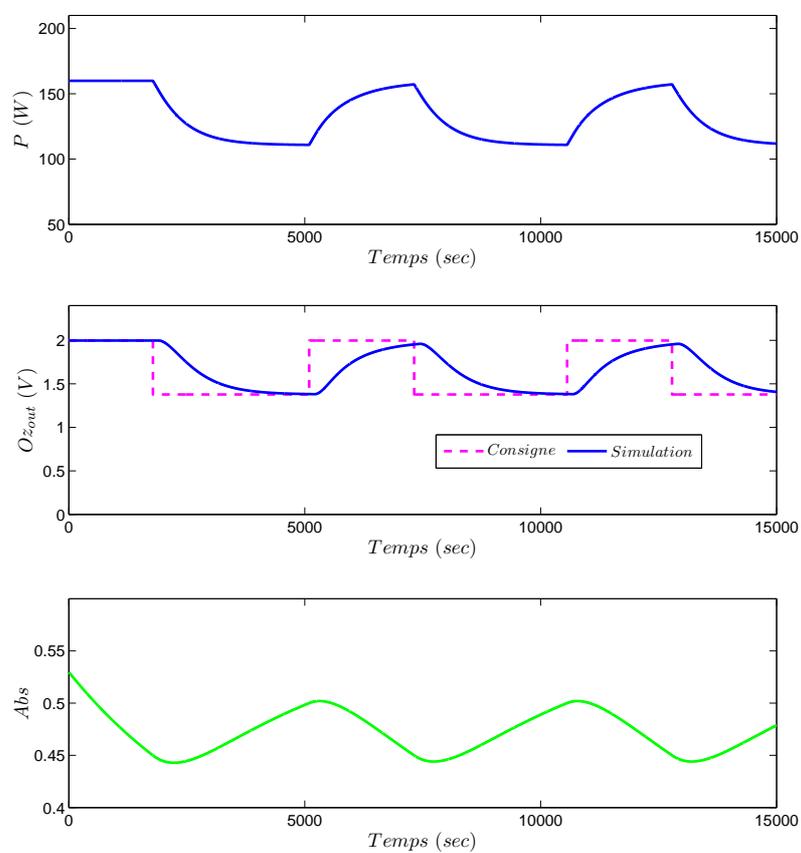


FIGURE 3.14 – Simulation avec réglage lent

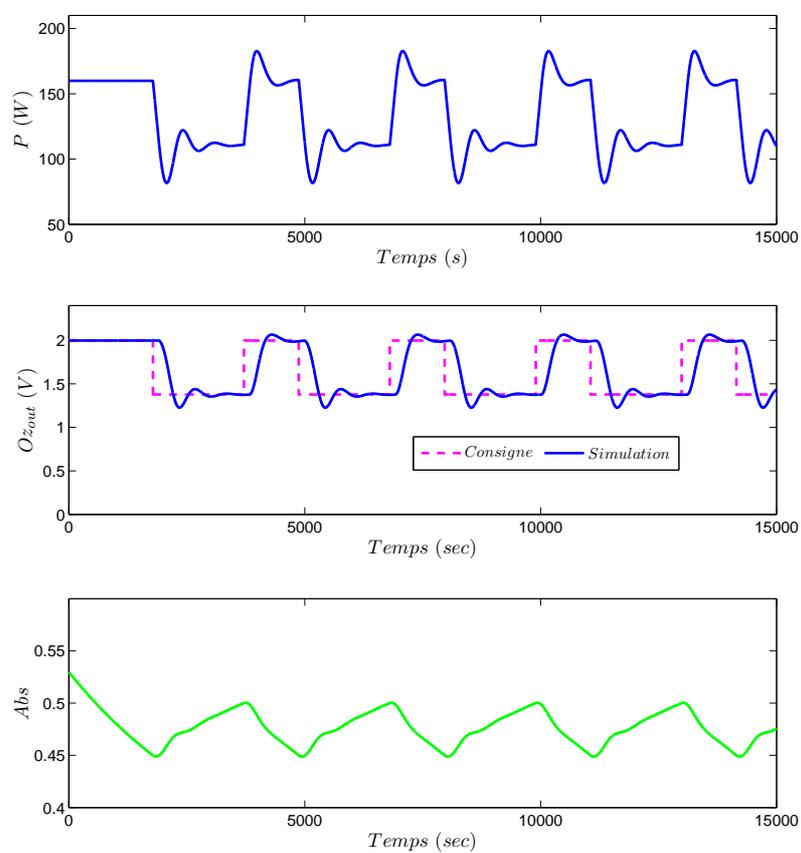


FIGURE 3.15 – Simulation avec réglage rapide

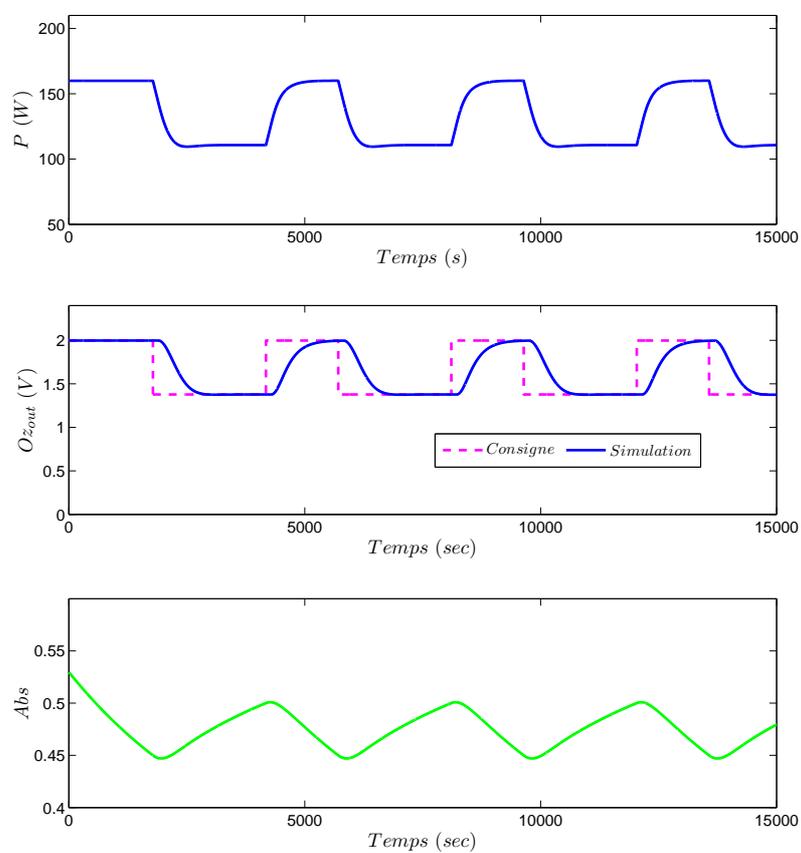


FIGURE 3.16 – Simulation avec réglage intermédiaire

Remarque 3.4. *La valeur zéro dans le correcteur $K_1 = [40.9414 \ 0]$ concerne le retour de la sortie Abs . Cette valeur n'a pas été imposée dans le calcul. Elle a bien été fournie par la résolution de l'équation de Riccati.*

C- Analyse de la stabilité de la boucle fermée

La synthèse du correcteur ci-dessus est réalisée en ignorant les retards purs du modèle. Effectivement, le modèle II estimé (tableau 2.3) présente des retards purs de 106.7s et de 200s pour les sorties $Oz_{out}(t)$ et $Abs(t)$, respectivement. Bien que la simulation ne laisse pas apparaître d'instabilité, ce paragraphe présente l'étude de robustesse du système en boucle fermée en présence de retard.

Réécrivons la loi de commande définie par (3.92) comme suit

$$u(t) = -K\tilde{x}(t) \quad (3.106)$$

avec $K = [K_1 \ K_2]$.

Reformulons également l'état du système en boucle fermée donné par (3.94) de la façon suivante

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 u(t) + \tilde{B}_2 u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.107)$$

où

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.00006 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.36 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Ainsi, on peut distinguer le terme $\tilde{B}_1 u(t)$, qui agit seulement sur l'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$, du terme $\tilde{B}_2 u(t)$ qui agit seulement sur $Abs(t)$ (cf. (3.89)). Supposons que ces deux contributions soient affectées des retards variables dans le temps $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ où $\tau_1(t)$ est associé au transfert Oz_{out}/P et $\tau_2(t)$ au transfert Abs/P , et considérons les hypothèses suivantes sur ces retards :

- Les retards sont bornés ; il existe un scalaire h_i tel que

$$0 \leq \tau_i(t) \leq h_i, \text{ pour } i = 1, 2, \text{ et } \forall t \geq 0, \quad (3.109)$$

- La dérivée des retards est bornée ; il existe un scalaire μ_i tel que

$$|\dot{\tau}_i(t)| \leq \mu_i, \text{ pour } i = 1, 2, \text{ et } \forall t \geq 0. \quad (3.110)$$

La loi de commande appliquée est donc $u(t - \tau_i(t)) = -K\tilde{x}(t - \tau_i(t))$, avec $i = 1, 2$, donnant l'état suivant

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) - \tilde{B}_1K\tilde{x}(t - \tau_1(t)) - \tilde{B}_2K\tilde{x}(t - \tau_2(t)) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega \\ &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_{\tau_1}\tilde{x}(t - \tau_1(t)) + \tilde{A}_{\tau_2}\tilde{x}(t - \tau_2(t)) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega\end{aligned}\quad (3.111)$$

où $\tilde{A}_{\tau_i} = -\tilde{B}_iK$, avec $i = 1, 2$, sont les matrices liées aux retards.

Le test de robustesse du système en boucle fermée vis-à-vis de la présence des retards, et éventuellement de leur variation, est positif si l'inégalité matricielle linéaire (Linear matricial inequality ou LMI) présentée dans le théorème 3.1 est vérifiée. Ce théorème est une adaptation pour deux retards variables dans le temps du théorème proposé par He *et al.* (2002).

Théorème 3.1. *Si les retards satisfont (3.109)-(3.110) et si il existe des matrices N_{ij} , T_j , $P > 0$, $Q_i \geq 0$ et $Z_i > 0$, avec $i = 1, 2$, et $j = 1, \dots, 4$, telles que la condition sous forme de LMI²*

$$\begin{aligned}\text{Sym} & \left\{ \begin{bmatrix} N_{11} & N_{21} & T_1 \\ N_{12} & N_{22} & T_2 \\ N_{13} & N_{23} & T_3 \\ N_{14} & N_{24} & T_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_1\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_2\mathbf{I} \\ -\tilde{A} & -\tilde{A}_{\tau_1} & -\tilde{A}_{\tau_2} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \\ & + \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(1 - \mu_1)Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(1 - \mu_2)Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (h_1Z_1 + h_2Z_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -h_1Z_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -h_2Z_2 \end{bmatrix} < 0\end{aligned}$$

soit vérifiée, alors le système défini par (3.111) est asymptotiquement stable.

Preuve du théorème 3.1 : Voir l'annexe A.1

En considérant les équations (3.105) et (3.111), la LMI du théorème 3.1 est vérifiée pour des retards variables avec pour limites maximales $h_1 = h_2 = 454s$. Autrement dit, pour les deux retards estimés, à savoir $\hat{\tau}_1 = 106.7s$ et $\hat{\tau}_2 = 200s$, le théorème 3.1 montre que le système en boucle fermée est stable.

Notons que la résolution du problème LMI du théorème 3.1 a été faite pour des valeurs $\mu_1 = \mu_2 = 0$ pour réduire le conservatisme lié à l'hypothèse de variabilité des retards. Ce choix est autorisé par le fait que, dans l'étude considérée, les retards sont constants, le théorème ayant été démontré pour le cas général de retards

²On considère que $\text{Sym}\{X\} = X + X^T$

variables.

D- Résultats expérimentaux

Le schéma de commande par hystérésis présenté dans la figure 3.8 est appliqué avec le correcteur (3.105) pour maintenir la valeur de l'absorbance autour de 0.5. Les valeurs haute et basse de la consigne Oz_{in} sont choisies en prenant en compte l'évolution de l'absorbance par rapport à l'ozone dans les événements présentée dans la figure 2.8, à savoir

- Une consigne Oz_{in} haute égale à 1.8435 V jusqu'à ce que l'absorbance Abs devienne inférieure au seuil de 0.45. Dans le schéma de la figure 3.13, la consigne haute considérée est donc $\omega = 0$ puisque $y_1(t) = Oz_{out}(t) - 1.8435$.
- Une consigne Oz_{in} basse égale à 1.2235 V jusqu'à ce que l'absorbance Abs devienne supérieure au seuil de 0.5, soit une consigne basse $\omega = -0.62$ sur la figure 3.13.

Les résultats expérimentaux de la commande par hystérésis avec la commande optimale sont présentés sur la figure 3.17.

On observe que l'absorbance est bien maintenue autour de 0.5 avec une réduction de la puissance appliquée à l'ozoneur $P \in [100W, 160W]$. Réduction de la consommation électrique, et par conséquent d'ozone, et respect de norme de rejet fixée (Abs autour de 0.5), ceci montre l'efficacité du schéma de commande de la figure 3.13.

3.3.2 Commande directe de l'absorbance Abs

Dans les deux applications précédentes avec la commande par hystérésis, l'absorbance est régulée indirectement en contrôlant l'ozone dans les événements ; plus précisément, il y a une boucle de régulation sur l'ozone dans les événements, et la consigne Oz_{in} est fixée à une valeur basse ou haute en fonction de l'absorbance comme le montre le schéma de la figure 3.8.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de contrôler directement les deux sorties, ozone dans les événements Oz_{out} et absorbance Abs . Rappelons que l'objectif est de respecter les objectifs de rejet, qui consistent dans ce cas en un seuil à 0.5 de l'absorbance, tout en réduisant la quantité d'ozone consommée, c'est-à-dire en minimisant l'ozone dans les événements, le gaz oxydant produit en excès. Les valeurs des consignes pour la régulation de ces deux sorties pourraient être naturellement 0.5 pour l'absorbance et 0 pour l'ozone dans les événements. Cependant, le fonctionnement du pilote avec une concentration nulle d'ozone dans les événements n'est pas réaliste. Effectivement, il y a toujours une partie du gaz injecté en bas du réacteur qui ne

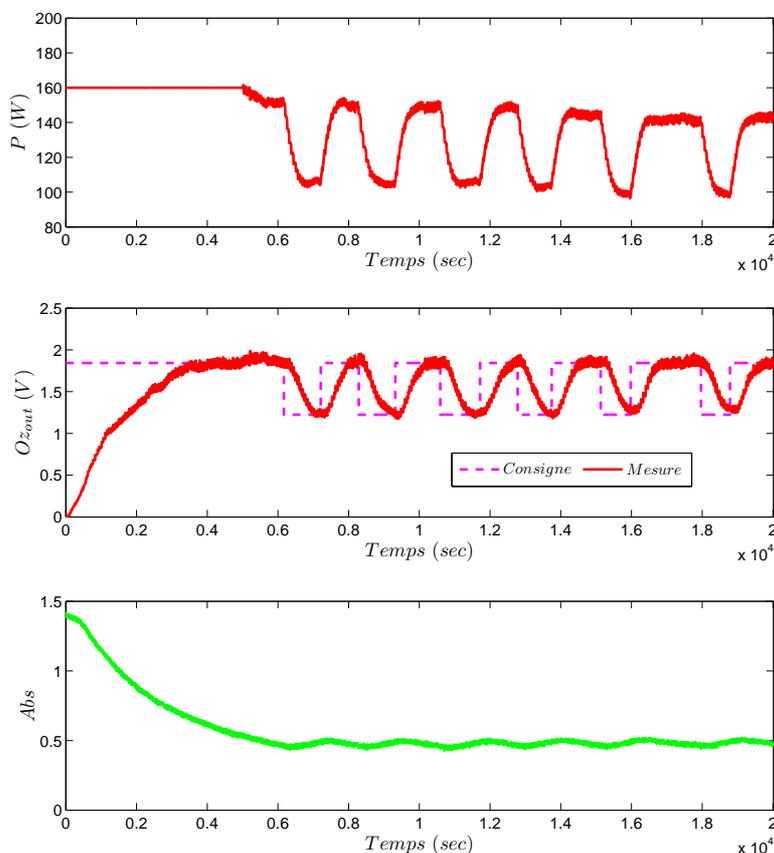


FIGURE 3.17 – Résultats de la commande par hystérésis de Abs avec l'approche commande optimale

réagit pas avec les matières à dégrader et qui s'accumule dans les événements. Du coup, une valeur de consigne supérieure à zéro doit être choisie. Ce choix n'est pas trivial. Même si c'est ce qui a été réalisé dans les applications précédentes, le choix de cette consigne n'est pas optimal.

Par conséquent, nous avons choisi un schéma de commande présentant deux boucles de régulation en cascade : une boucle de régulation interne pour le contrôle de Oz_{out} ou bien de Oz_{out} et de Abs , et une boucle externe pour la régulation de Abs à la valeur de consigne à 0.5. Le schéma de commande directe est présenté par la figure 3.18.

Dans les essais expérimentaux, une perturbation sur l'absorbance Abs_{inlet} de l'effluent à traiter est réalisée. Le bon comportement du système en boucle fermée est jugé en termes de rejet de cette perturbation en plus des performances de rapidité et de poursuite.

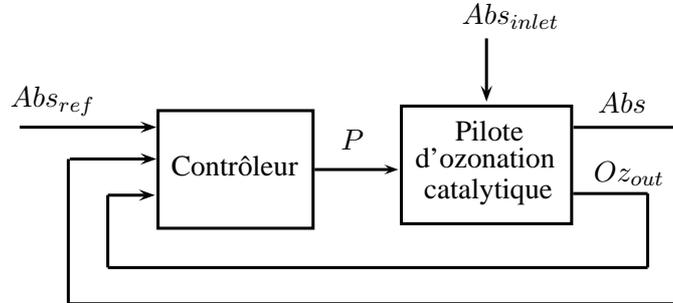


FIGURE 3.18 – Schéma de commande directe

Deux essais expérimentaux ont permis de valider deux implémentations différentes du schéma de la figure 3.18 : une implémentation avec la commande optimale et une implémentation avec la commande H_∞ . Une analyse de la stabilité est réalisée dans les deux cas pour évaluer la robustesse vis-à-vis des retards purs négligés dans la synthèse.

3.3.2.1 Application de la commande optimale (Abouzlam *et al.* (2013a))

A- Synthèse du correcteur

Comme pour l'application décrite dans le paragraphe 3.3.1.2, le modèle du pilote d'ozonation catalytique considéré est donné sous la forme de la représentation d'état définie par les équations (3.88) et (3.89).

Le schéma de commande directe implémenté est décrit sur la figure 3.19. L'objectif de poursuite de la consigne Abs_{ref} par l'absorbance Abs est obtenu par l'action intégrale $K_2 \int (Abs(\tau) - Abs_{ref}) d\tau$. Les deux boucles en cascade doivent permettre le rejet de la perturbation Abs_{inlet} . L'objectif de réduction de la consommation électrique et de la concentration d'ozone en excès dans les événements est réalisé par la minimisation de la fonction coût (3.90). Comme précédemment, cette minimisation est réalisée en appliquant les outils de la technique de commande optimale décrits par Anderson et Moore (1989); Rachid et Mehdi (1997).

Selon le schéma présenté sur la figure 3.19, la loi de commande est donnée par

$$u(t) = -K_1 x(t) - K_2 \int (\omega - y_2(\tau)) d\tau \quad (3.112)$$

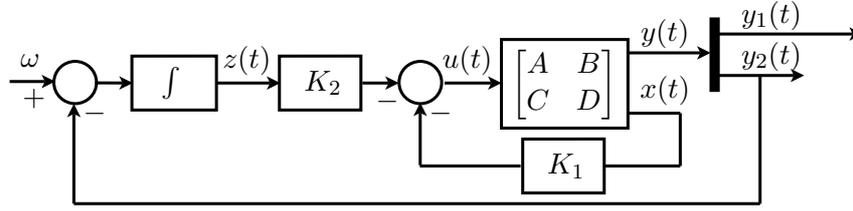


FIGURE 3.19 – Commande directe avec l’approche commande optimale

qui peut être reformulée sous forme du retour d’état suivant

$$u(t) = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

avec $\dot{z}(t) = \omega - y_2(t)$.

Considérons le vecteur d’état augmenté suivant

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Le système en boucle fermée peut alors être écrit sous la forme suivante

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.115)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

La synthèse du correcteur $\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ consiste à résoudre le problème de commande optimale à horizon infini, c’est-à-dire suivre les mêmes étapes que celles décrites dans le paragraphe 3.3.1.2 (voir les équations (3.96-3.99)).

B- Simulation à partir du modèle non linéaire

Testons en simulation plusieurs réglages du correcteur $\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$.

Le simulateur correspond au schéma de commande présenté dans la figure 3.19 où le modèle linéaire (A, B, C, D) est remplacé par le modèle non linéaire III du tableau 2.3. Pour pouvoir tester le rejet de la perturbation Abs_{inlet} , il est nécessaire d’introduire ce signal dans le simulateur. N’ayant pas modélisé le transfert Abs/Abs_{inlet} , celui-ci est approximé en considérant le temps de séjour tiré des caractéristiques fournies dans le tableau 2.1. Ce transfert est donc modélisé par une fonction de transfert $H_d(s)$ du premier ordre avec un retard pur de 200 s, un gain

unitaire, et une constante de temps de 2280 s calculée à partir du volume du réacteur (19 L) et du débit (25 L/h); soit

$$H_d(s) = \frac{e^{-200s}}{1 + 2280s} \quad (3.117)$$

Le schéma du simulateur est présenté sur la figure 3.20.

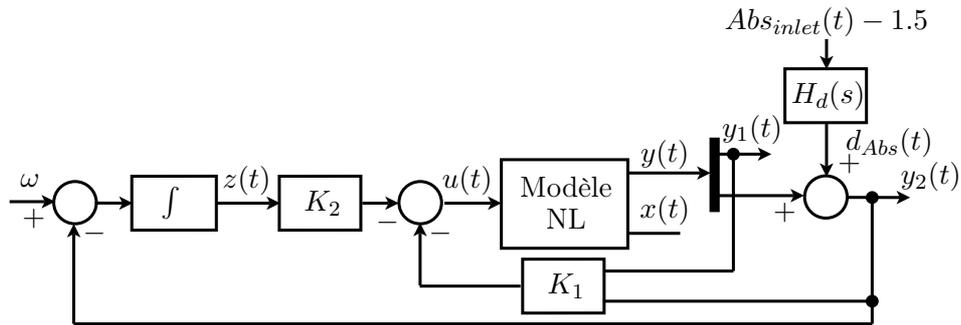


FIGURE 3.20 – Simulateur de la boucle fermée avec l’approche commande optimale

Considérons trois réglages différents conduisant à une dynamique de la boucle fermée :

- lente

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 1/3 \quad (3.118)$$

$$K_1 = [0.00084 \quad -581.8], \quad K_2 = 0.3873 \quad (3.119)$$

- rapide

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad R = 0.2 \quad (3.120)$$

$$K_1 = [0.0189 \quad -1579], \quad K_2 = 2.1213 \quad (3.121)$$

- intermédiaire

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 0.5 \quad (3.122)$$

$$K_1 = [0.0049 \quad -1030.3], \quad K_2 = 1 \quad (3.123)$$

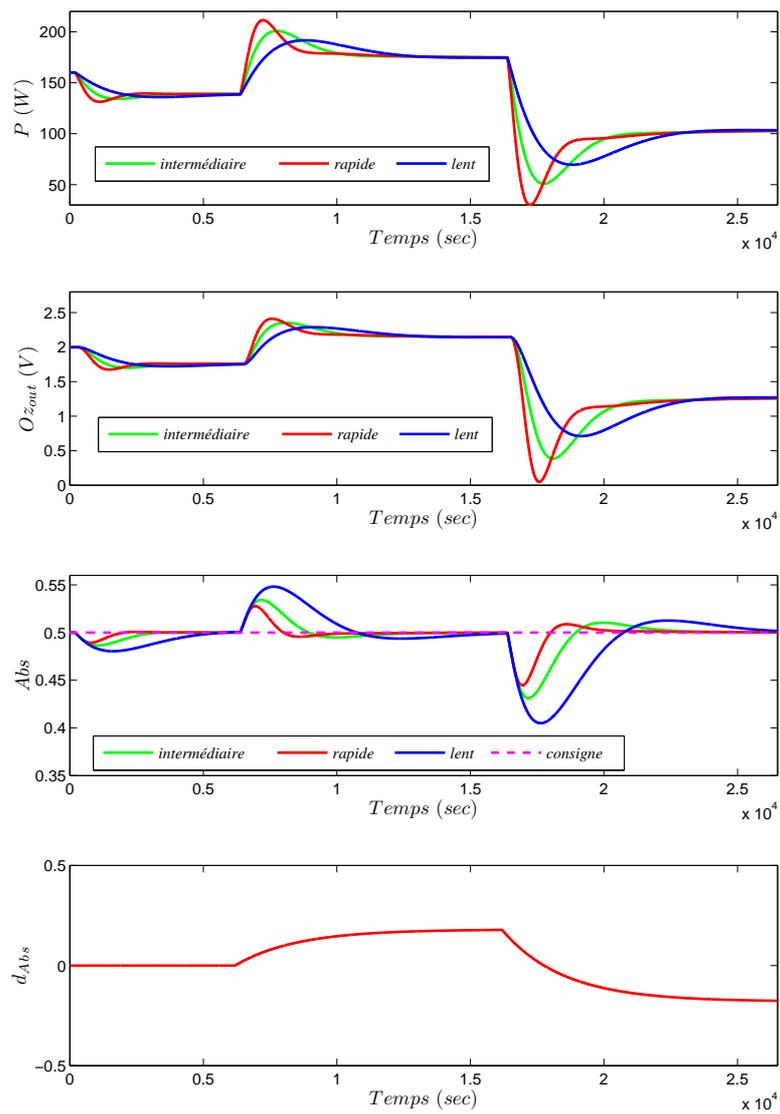


FIGURE 3.21 – Simulation avec différents réglages

Les résultats de simulation de la boucle fermée sont présentés dans la figure 3.21.

On observe que dans les trois cas, la perturbation d_{Abs} est bien rejetée. Le réglage lent entraîne à une réponse lente inacceptable pour une application industrielle. Par contre, avec le réglage rapide, la commande commence à se saturer et on risque alors l'instabilité. Par conséquent, l'essai expérimental présenté ultérieurement est implémenté avec le réglage intermédiaire qui offre le meilleur compromis stabilité-vitesse.

C- Analyse de la stabilité de la boucle fermée

La synthèse du correcteur ci-dessus est réalisée en ignorant les retards purs du modèle. L'étude de robustesse du système en boucle fermée en présence de retard suit les mêmes étapes que celles présentées dans le paragraphe 3.3.1.2 ; seules les valeurs de gain du retour d'état $[K_1 \ K_2]$ et les matrices \tilde{A} et \tilde{B} sont différentes. L'analyse de la stabilité, qui donne les conditions sur les retards pour lesquels le système bouclé reste stable, mène au théorème 3.1.

L'application du théorème 3.1, avec les équations (3.115) et (3.123), montre que le système en boucle fermée reste stable pour une limite maximale du retard τ_2 de $h_2 = 697s$, alors que la limite h_1 peut être considérée comme infinie ; plus précisément, la LMI du théorème 3.1 trouve une solution pour des valeurs très grandes de h_1 . Or, les deux retards estimés $\hat{\tau}_1 = 106.7s$ et $\hat{\tau}_2 = 200s$ (voir modèle II du Tableau 2.3) sont bien inférieurs à ces limites, ce qui montre que le système en boucle fermée est stable.

D- Résultats expérimentaux

Le schéma de commande directe présenté sur la figure 3.19 est appliqué sur le pilote d'ozonation catalytique avec le correcteur (3.123) pour réguler l'absorbance à une valeur de consigne de $Abs_{ref} = 0.5$. La consigne ω du schéma prend donc la valeur zéro puisque $y_2 = Abs - Abs_{ref}$.

L'essai est divisé en quatre parties principales :

- Le pilote fonctionne d'abord en boucle ouverte avec une puissance constante de 160 W pendant 5800 s pour atteindre le point de fonctionnement.
- Pour $t \in]5800 \text{ s}, 11800 \text{ s}]$, le schéma de commande de la figure 3.19 est appliqué. L'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} est à une valeur constante de 1.5.
- Pour $t \in]11800 \text{ s}, 19300 \text{ s}]$, l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} subit une perturbation positive en échelon pour atteindre la valeur de 1.85. Autre-

ment dit, une augmentation de plus de 20 % de la concentration de la solution de paranitrophénol en entrée a lieu à l'instant 11800 s.

- Pour $t \in]19300 \text{ s}, 26750 \text{ s}]$, l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} subit une perturbation négative en échelon pour atteindre la valeur de 1.25.

Les résultats expérimentaux de la commande directe avec la commande optimale sont présentés sur la figure 3.22.

Notons que la régulation de Abs autour du 0.5 est assurée. On peut également observer que la perturbation sur Abs_{inlet} est bien rejetée.

Pour conclure sur la minimisation de la concentration de l'ozone dans les événements, concentrons nous sur la deuxième partie où $t \in]5800 \text{ s}, 11800 \text{ s}]$. On constate que pour $Abs_{inlet} = 1.5$, l'ozone dans les événements Oz_{out} est proche d'une valeur de 1.5 V (tension fournie par le capteur) et la puissance appliquée à l'ozoneur est, en moyenne, proche de 125 W. Comparons cette partie à la commande par hystérésis avec commande optimale dont les résultats sont donnés dans la figure 3.17. Avec cette commande par hystérésis, l'ozone dans les événements Oz_{out} varie entre les valeurs de consignes 1.2235 et 1.8435 V et la puissance P varie entre 100 et 150 W. On peut estimer que la valeur moyenne du signal Oz_{out} est proche de la valeur de 1.5 V et que la valeur moyenne du signal P est proche de la valeur de 125 W ; des valeurs moyennes proches des valeurs obtenues avec la commande directe. On peut citer deux avantages de la commande directe sur la commande par hystérésis :

- La régulation de l'absorbance est bien plus efficace. Sur la figure 3.17, on observe une oscillation de Abs due aux changements réguliers de consigne Oz_{in} . Sur la partie où $t \in]5800 \text{ s}, 11800 \text{ s}]$ de la figure 3.22, après un transitoire, Abs devient stable autour de 0.5.
- Le rejet des perturbations sur Abs_{inlet} . Sur la partie où $t \in]11800 \text{ s}, 19300 \text{ s}]$ de la figure 3.22, le signal Oz_{out} monte jusqu'à une valeur proche de 2 V, valeur supérieure à la consigne haute Oz_{in} de la commande par hystérésis. Il n'est pas sûr que cette dernière ait pu rejeter une telle perturbation. Sur la partie où $t \in]19300 \text{ s}, 26750 \text{ s}]$ de la figure 3.22, le signal Oz_{out} descend jusqu'à une valeur proche de 1.1 V, valeur inférieure à la consigne basse Oz_{in} de la commande par hystérésis. Une solution pour la commande par hystérésis serait d'augmenter l'écart entre les consignes haute et basse pour permettre de rejeter les perturbations, mais alors les oscillations sur l'absorbance seraient amplifiées.

C'est en ce sens, qu'on peut conclure que la minimisation de la concentration de l'ozone dans les événements est bien meilleure avec la commande directe. C'est bien évidemment l'intérêt des deux boucles de régulation en cascade.

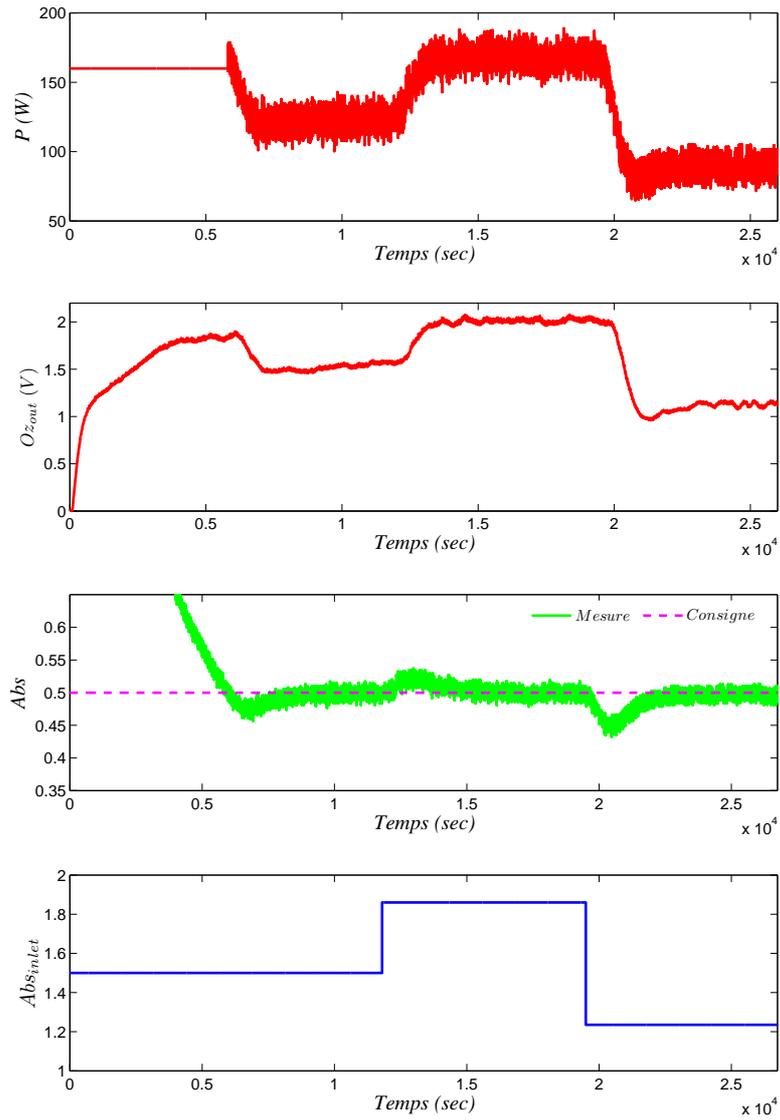


FIGURE 3.22 – Résultats de la commande directe de Abs avec l'approche commande optimale

Remarque 3.5. Notons que, après la mise en boucle fermée, l'entrée de commande P est nettement plus perturbée que pour les applications avec commande par hystérésis testées précédemment. Ceci s'explique par le bouclage avec, cette fois, deux mesures bruitées, l'ozone dans les événements Oz_{out} et l'absorbance Abs .

3.3.2.2 Application de la commande H_∞ (Abouzlam *et al.* (2014))

A- Synthèse du correcteur

Rappelons le modèle considéré pour représenter le comportement du pilote d'ozonation catalytique

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du_1(t) \end{aligned} \quad (3.124)$$

où

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Oz_{out}(t) - Oz_{out}(0) \\ Abs(t) - 0.5 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \\ u_1(t) &= P(t) - P(0), \quad A = \begin{bmatrix} -0.0045 & 0 \\ 0 & -0.00027 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.00006 \\ -1.36 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Le schéma de commande directe implémenté est présenté dans la figure 3.23. Les deux correcteurs $K_1(s)$ et $K_2(s)$ sont calculés par la synthèse H_∞ (paragraphe 3.2.3). Ce schéma doit réaliser deux objectifs principaux :

- La régulation de l'absorbance autour de 0.5. La poursuite par l'absorbance Abs de la consigne Abs_{ref} , et le rejet des perturbations sur l'absorbance Abs_{inlet} de l'effluent à traiter sont réalisés par des correcteurs de type PI.
- La minimisation de la consommation électrique et de la production de l'ozone. En synthèse H_∞ , cet objectif est atteint par la limitation de la commande u_1 .

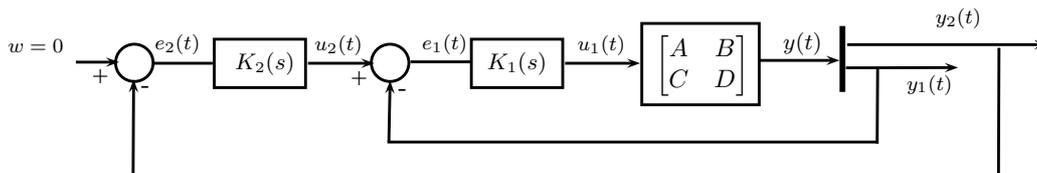


FIGURE 3.23 – Commande directe avec l'approche commande H_∞

Notons que

$$e_1(t) = u_2(t) - C_1x(t) \quad (3.129)$$

$$e_2(t) = w(t) - C_2x(t) \quad (3.130)$$

On a alors les équations d'état suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_{W_1}(t) &= -B_{W_1}C_1x(t) + A_{W_1}x_{W_1}(t) + B_{W_1}u_2(t) \\ z_3(t) &= -D_{W_1}C_1x(t) + C_{W_1}x_{W_1}(t) + D_{W_1}u_2(t) \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{W_2}(t) &= -B_{W_2}C_2x(t) + A_{W_2}x_{W_2}(t) + B_{W_2}w(t) \\ z_1(t) &= -D_{W_2}C_2x(t) + C_{W_2}x_{W_2}(t) + D_{W_2}w(t) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Les gains de pondération λ_1 et λ_2 fournissent les sorties (Gu *et al.* (2005))

$$\begin{aligned} z_4(t) &= \lambda_1u_1(t) \\ z_2(t) &= \lambda_2u_2(t) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Définissons les vecteurs suivants

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad x_{aug} = \begin{bmatrix} x \\ x_{W_1} \\ x_{W_2} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

A partir des équations (3.124, 3.131, 3.132, 3.133) et du schéma de la figure 3.24, on peut écrire le système augmenté $P(s)$ sous forme de représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aug}(t) &= A_{aug}x_{aug}(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -B_{W_1}C_1 & A_{W_1} & 0 \\ -B_{W_2}C_2 & 0 & A_{W_2} \end{bmatrix} x_{aug}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ B_{W_2} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ 0 & B_{W_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= C_z x_{aug}(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} -D_{W_2}C_2 & 0 & C_{W_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -D_{W_1}C_1 & C_{W_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{aug}(t) + \begin{bmatrix} D_{W_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & D_{W_1} \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} e(t) &= C_e x_{aug}(t) + D_{ew} w(t) + D_{eu} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{aug}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (3.137)$$

ou sous forme de matrice de transfert

$$P(s) : \left[\begin{array}{c|cc} A_{aug} & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \end{array} \right] \quad (3.138)$$

Définissons le correcteur global $K(s) = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 \\ 0 & K_2(s) \end{bmatrix}$ sous la forme d'une représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K e(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K e(t) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Définissons également la matrice de transfert $\mathcal{F}(P, K)$ du système en boucle fermée entre w et z sous la forme d'une représentation d'état comme suit

$$\begin{aligned} \dot{x}_{inf}(t) &= A_{inf} x_{inf}(t) + B_{inf} w(t) \\ z(t) &= C_{inf} x_{inf}(t) + D_{inf} w(t) \end{aligned} \quad (3.140)$$

où les matrices A_{inf} , B_{inf} , C_{inf} et D_{inf} sont obtenues à partir de (3.138) et (3.139).

L'objectif est de calculer un correcteur $K(s)$ qui assure la stabilité interne du système en boucle fermée et une norme H_∞ de $\mathcal{F}(P, K)$ inférieure à γ au moyen de la LMI (3.74).

Le choix de correcteurs de type proportionnel-intégral a été fait pour $K_1(s)$ et $K_2(s)$, soit

$$\begin{aligned} K_1(s) &= k_{p1} + \frac{k_{i1}}{s} \\ K_2(s) &= k_{p2} + \frac{k_{i2}}{s} \end{aligned} \quad (3.141)$$

B- Simulation à partir du modèle non linéaire

Testons en simulation plusieurs fonctions de pondération fréquentielle pour le calcul des correcteurs $K_1(s)$ et $K_2(s)$.

Le simulateur correspond au schéma de commande présenté dans la figure 3.23 où le modèle linéaire (A, B, C, D) est remplacé par le modèle non linéaire III du tableau 2.3. La perturbation sur Ab_{sinlet} est prise en compte sur $y_2(t)$ de la même façon que dans le simulateur de la figure 3.20 pour la commande optimale.

Le problème BMI est résolu avec la fonction `hinfstruct.m` de Matlab, résolution basée sur la technique d'optimisation développée par Apkarian et Noll (2006).

Considérons trois réglages différents conduisant à une dynamique de la boucle fermée :

- lente

$$W_1(s) = W_2(s) = \frac{2.9 \cdot 10^{-6}s + 0.00029}{s + 0.000115}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.48 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma = 0.352 \tag{3.142}$$

$$K_1(s) = 126.02 + \frac{0.626}{s}$$

$$K_2(s) = -7.881 - \frac{0.002}{s}$$

- rapide

$$W_1(s) = W_2(s) = \frac{2.9 \cdot 10^{-6}s + 0.00029}{s + 0.000115}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.74 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma = 0.2829 \tag{3.143}$$

$$K_1(s) = 169.81 + \frac{0.991}{s}$$

$$K_2(s) = -9.278 - \frac{0.0031}{s}$$

- intermédiaire

$$W_1(s) = W_2(s) = \frac{2.9 \cdot 10^{-6}s + 0.00029}{s + 0.000115}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.885 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma = 0.2899 \tag{3.144}$$

$$K_1(s) = 163.8336 + \frac{0.9381}{s}$$

$$K_2(s) = -9.105 - \frac{0.0029}{s}$$

Les résultats de simulation de la boucle fermée sont présentés dans la figure 3.25.

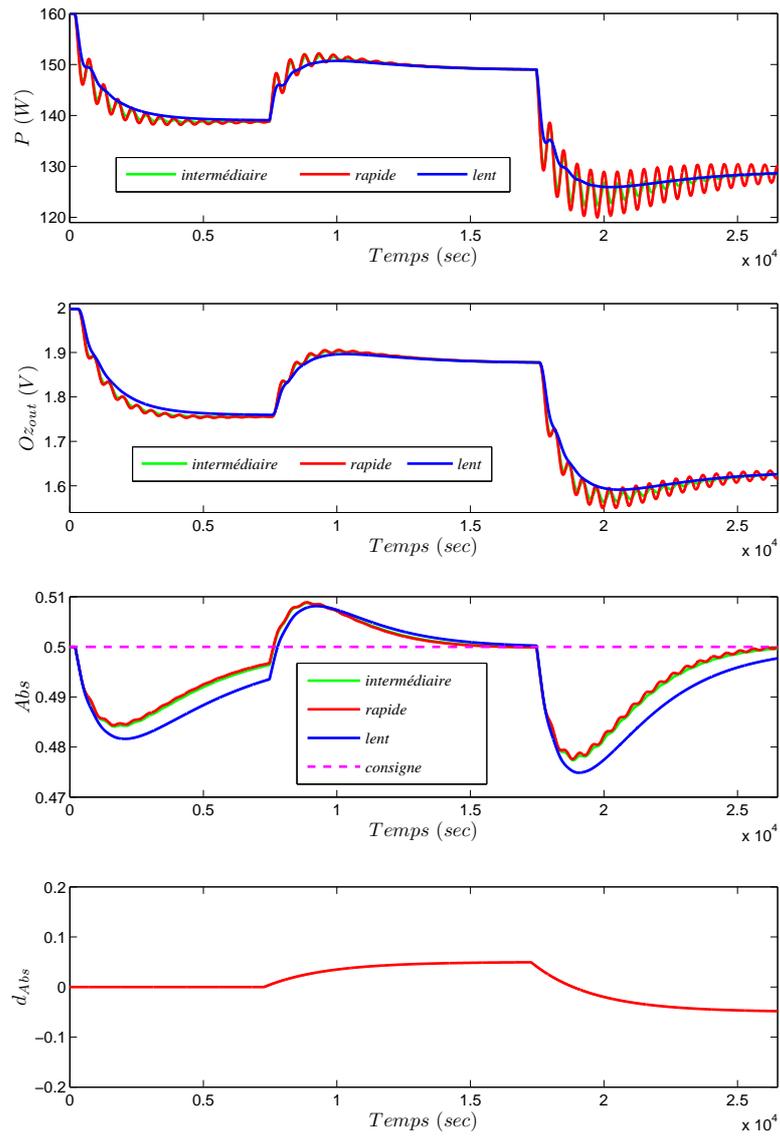


FIGURE 3.25 – Simulation avec différents réglages

On observe que le correcteur correspondant au réglage lent ne pose pas de problème d'oscillation contrairement au réglage intermédiaire, et surtout au réglage rapide. Cependant sa réponse est très lente. Ce phénomène d'oscillation peut être dû à la commande rapide qui peut amener le système à la limite de la non-linéarité ou peut provenir du système en boucle fermée qui admet un temps de montée très rapide. L'essai expérimental présenté ultérieurement est implémenté avec le réglage intermédiaire.

C- Analyse de la stabilité de la boucle fermée

La synthèse des correcteurs ci-dessus est réalisée en ignorant les retards purs du modèle. Dans ce paragraphe, une étude de robustesse du système en boucle fermée en présence de retard est réalisée.

Le correcteur $K_1(s) = k_{p1} + \frac{k_{i1}}{s}$ peut être réécrit sous la forme d'une représentation d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}_{K_1}(t) &= e_1(t) \\ u_1(t) &= k_{i1}x_{K_1}(t) + k_{p1}e_1(t)\end{aligned}\quad (3.145)$$

Notons que

$$e_1(t) = u_2(t) - C_1x(t) \quad (3.146)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\dot{x}_{K_1}(t) &= u_2(t) - C_1x(t) \\ u_1(t) &= k_{i1}x_{K_1}(t) + k_{p1}u_2(t) - k_{p1}C_1x(t)\end{aligned}\quad (3.147)$$

La représentation d'état du correcteur $K_2(s) = k_{p2} + \frac{k_{i2}}{s}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{x}_{K_2}(t) &= e_2(t) \\ u_2(t) &= k_{i2}x_{K_2}(t) + k_{p2}e_2(t)\end{aligned}\quad (3.148)$$

avec

$$e_2(t) = w(t) - C_2x(t) \quad (3.149)$$

Soit donc

$$\begin{aligned}\dot{x}_{K_2}(t) &= w(t) - C_2x(t) \\ u_2(t) &= k_{i2}x_{K_2}(t) + k_{p2}w(t) - k_{p2}C_2x(t)\end{aligned}\quad (3.150)$$

A partir de (3.147) et (3.150), on obtient

$$\dot{x}_{K_1}(t) = -k_{p2}C_2x(t) - C_1x(t) + k_{i2}x_{K_2}(t) + k_{p2}w(t) \quad (3.151)$$

Définissons le vecteur d'état $\tilde{x} = [x \quad x_{K_1} \quad x_{K_2}]$. Le système en boucle fermée peut alors être écrit comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u_1(t) + H_w w(t) \\ &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k_{p_2}C_2 - C_1 & 0 & k_{i_2} \\ -C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ k_{p_2} \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (3.152)$$

et

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -K\tilde{x}(t) + Hw(t) \\ &= - \begin{bmatrix} k_{p_1}C_1 + k_{p_1}k_{p_2}C_2 & -k_{i_1} & -k_{p_1}k_{i_2} \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + k_{p_1}k_{p_2}w(t) \end{aligned} \quad (3.153)$$

Posons $\bar{u}_1(t) = -K\tilde{x}(t)$. Alors $u_1(t) = \bar{u}_1(t) + Hw(t)$ et (3.152) devient

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}(\bar{u}_1(t) + Hw(t)) + H_w w(t) \\ &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\bar{u}_1(t) + \tilde{H}w(t) \end{aligned} \quad (3.154)$$

avec $\tilde{H} = \tilde{B}H + H_w$.

Notons que \bar{u}_1 et u_1 représentent le même signal, la variation de la puissance, car la consigne w est égale à zéro pour maintenir l'absorbance $Abs(t)$ autour de 0.5.

On sait que le système présente des retards estimés à 106.7 s pour l'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$ et à 200 s pour l'absorbance $Abs(t)$.

Reformulons l'équation (3.154) pour faire apparaître la contribution de la commande sur chacune des sorties

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1\bar{u}_1(t) + \tilde{B}_2\bar{u}_1(t) + \tilde{H}w(t) \quad (3.155)$$

avec

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.00006 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.36 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

Ainsi, on peut distinguer le terme $\tilde{B}_1\bar{u}_1(t)$, qui agit seulement sur l'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$, du terme $\tilde{B}_2\bar{u}_1(t)$ qui agit seulement sur $Abs(t)$.

Dans l'application, la commande agit donc avec un retard. Dans la formulation (3.155), on peut distinguer la commande retardée $\bar{u}_1(t - \tau_1(t))$, qui agit seulement sur l'ozone dans les événements $Oz_{out}(t)$, de la commande retardée $\bar{u}_1(t - \tau_2(t))$ qui agit seulement sur $Abs(t)$. La précision sur les retards estimés est relative. Il est important de connaître l'intervalle pour chaque retard $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ pour lequel le système en boucle fermée reste stable.

La loi de commande appliquée est donc $\bar{u}_1(t - \tau_i(t)) = -K\tilde{x}(t - \tau_i(t))$, avec $i = 1, 2$, donnant l'équation d'état suivante

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) - \tilde{B}_1K\tilde{x}(t - \tau_1(t)) - \tilde{B}_2K\tilde{x}(t - \tau_2(t)) + \tilde{H}w \\ &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_{\tau_1}\tilde{x}(t - \tau_1(t)) + \tilde{A}_{\tau_2}\tilde{x}(t - \tau_2(t)) + \tilde{H}w\end{aligned}\quad (3.157)$$

où $\tilde{A}_{\tau_i} = -\tilde{B}_iK$, avec $i = 1, 2$, sont les matrices liées aux retards.

Considérons les hypothèses suivantes sur les retards :

- Les retards sont bornés tels que

$$\underline{h}_i \leq \tau_i(t) \leq \bar{h}_i, \text{ pour } i = 1, 2, \text{ et } \forall t \geq 0, \quad (3.158)$$

- La dérivée des retards est bornée telle que

$$|\dot{\tau}_i(t)| \leq \mu_i \leq \infty, \text{ pour } i = 1, 2, \text{ et } \forall t \geq 0. \quad (3.159)$$

Le théorème 3.2, déduit de Kim (2011) et adapté pour deux retards, est utilisé pour étudier la stabilité du système (3.157), et pour déterminer les intervalles de stabilité définis par \underline{h}_1 et \bar{h}_1 pour l'ozone dans les événements et par \underline{h}_2 et \bar{h}_2 pour l'absorbance.

Théorème 3.2. *Considérons le système linéaire (3.157) d'ordre n et présentant des retards purs soumis aux contraintes (3.158-3.159). Si il existe une matrice $P > 0$ de taille $3n \times 3n$, des matrices $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 > 0$ de taille $2n \times 2n$, des matrices $R_1, R_2, R_3, R_4 > 0$ de taille $n \times n$, des matrices F_1, F_4, F_7, F_{10} de taille $2n \times 9n$ et des matrices $F_2, F_3, F_5, F_6, F_8, F_9, F_{11}, F_{12}$ de taille $n \times 9n$ telles que les quatre LMIs suivantes soient vérifiées*

$$\left[\begin{array}{cccc} \psi_0 + \underline{h}_1\psi_1 + \bar{h}_2\psi_2 & (\bar{h}_1 - \underline{h}_1)F_1^T & (\bar{h}_1 - \underline{h}_1)F_2^T & (\bar{h}_1 - \underline{h}_1)F_3^T \\ * & -(\bar{h}_1 - \underline{h}_1)Q_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -R_1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\frac{(\bar{h}_1 - \underline{h}_1)}{3}R_2 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \underline{h}_1F_4^T & \underline{h}_1F_5^T & \underline{h}_1F_6^T & \bar{h}_2F_{10}^T & \bar{h}_2F_{11}^T & \bar{h}_2F_{12}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\underline{h}_1Q_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\frac{\underline{h}_1}{3}R_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\bar{h}_2Q_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -R_3 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\frac{\bar{h}_2}{3}R_4 \end{array} \right] < 0$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \psi_0 + \bar{h}_1\psi_1 + \underline{h}_2\psi_2 & \bar{h}_1F_4^T & \bar{h}_1F_5^T & \bar{h}_1F_6^T & (\bar{h}_2 - \underline{h}_2)F_7^T \\ * & -\bar{h}_1Q_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\frac{\bar{h}_1}{3}R_2 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -(\bar{h}_2 - \underline{h}_2)Q_6 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} (\bar{h}_2 - \underline{h}_2)F_8^T & (\bar{h}_2 - \underline{h}_2)F_9^T & \underline{h}_2F_{10}^T & \underline{h}_2F_{11}^T & \underline{h}_2F_{12}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -R_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -\frac{(\bar{h}_2 - \underline{h}_2)}{3}R_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\underline{h}_2Q_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -R_3 & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\frac{\underline{h}_2}{3}R_4 \end{array} \right] < 0$$

où

$$\begin{aligned}
\psi_0 = & \langle 2 [e_1 \ e_4 + e_5 \ e_8 + e_9] P [A_c^T \ e_1 - e_3 \ e_1 - e_7]^T \rangle_s \\
& + [e_1 \ e_1] (Q_1 + Q_2) [e_1 \ e_1]^T - (1 - \mu_1) [e_1 \ e_2] Q_1 [e_1 \ e_2]^T \\
& - [e_1 \ e_3] Q_2 [e_1 \ e_3]^T + \bar{h}_1 [e_1 \ A_c^T] Q_3 [e_1 \ A_c^T]^T + A_c^T (\bar{h}_1^2 R_1^2 \\
& + \bar{h}_1^3 R_2) A_c + \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_0 \ e_5]^T + 2 [A_c^T \ e_0] Q_2 [\bar{h}_1 e_1 \ e_4 + e_5]^T \\
& + 2F_1^T [e_4 \ e_2 - e_3]^T + (4F_2^T + 6F_3^T) [\bar{h}_1 e_2 - e_4]^T + 2F_4^T [e_5 \ e_1 - e_2]^T \\
& - (4F_5^T + 6F_6^T) e_5^T \rangle_s + [e_1 \ e_1] (Q_4 + Q_5) [e_1 \ e_1]^T \\
& - (1 - \mu_2) [e_1 \ e_6] Q_4 [e_1 \ e_6]^T - [e_1 \ e_7] Q_5 [e_1 \ e_7]^T \\
& + \bar{h}_2 [e_1 \ A_c^T] Q_6 [e_1 \ A_c^T]^T + A_c^T (\bar{h}_2^2 R_3^2 + \bar{h}_2^3 R_4) A_c \\
& + \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [e_0 \ e_9]^T + 2 [A_c^T \ e_0] Q_5 [\bar{h}_2 e_1 \ e_8 + e_9]^T \\
& + 2F_7^T [e_8 \ e_6 - e_7]^T + (4F_8^T + 6F_9^T) [\bar{h}_2 e_6 - e_8]^T \\
& + 2F_{10}^T [e_9 \ e_1 - e_6]^T - (4F_{11}^T + 6F_{12}^T) e_9^T \rangle_s \tag{3.160}
\end{aligned}$$

$$\psi_1 = \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_1 \ e_0]^T - (4F_2^T + 6F_3^T) e_2^T + (4F_5^T + 6F_6^T) e_1^T \rangle_s \tag{3.161}$$

$$\psi_2 = \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [e_1 \ e_0]^T - (4F_8^T + 6F_9^T) e_6^T + (4F_{11}^T + 6F_{12}^T) e_1^T \rangle_s \tag{3.162}$$

avec

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2} [(\cdot) + (\cdot)^T] \tag{3.163}$$

$$A_c = [\tilde{A} \ \tilde{A}_{\tau_1} \ \mathbf{0}_{n \times 3n} \ \tilde{A}_{\tau_2} \ \mathbf{0}_{n \times 3n}] \tag{3.164}$$

$$e_i = [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \ I_n \ \mathbf{0}_{n \times (9-i)n}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \tag{3.165}$$

alors le système (3.157) est asymptotiquement stable

Preuve du théorème 3.2 : Voir l'annexe A.2

L'application du théorème 3.2 montre que le système en boucle fermée, présenté sur la figure 3.23, reste stable pour $\tau_1(t) \in [104.2 \text{ s}, 108.4 \text{ s}]$ et $\tau_2(t) \in [198 \text{ s}, 202.6 \text{ s}]$. On peut donc conclure que les retards estimés $\hat{\tau}_1 = 106.7 \text{ s}$ et $\hat{\tau}_2 = 200 \text{ s}$ satisfont les conditions de stabilité énoncées par le théorème 3.2.

Notons que la résolution du problème LMI du théorème 3.2 a été faite pour des valeurs $\mu_1 = \mu_2 = 0$ pour réduire le conservatisme lié à l'hypothèse de variabilité des retards. Ce choix est autorisé par le fait que, dans l'étude considérée, les retards sont constants, le théorème ayant été démontré pour le cas général de retards variables.

Remarque 3.6. *On observe que les bornes \bar{h}_i , $i = 1, 2$ sont proches des valeurs estimées $\hat{\tau}_i$. Ce problème peut être due au conservatisme du théorème 3.2.*

D- Résultats expérimentaux

Le schéma de commande directe présenté sur la figure 3.23 est appliqué sur le pilote d'ozonation catalytique avec le correcteur (3.144) pour réguler l'absorbance à une valeur de consigne $Abs_{ref} = 0.5$. La consigne ω du schéma prend donc la valeur zéro puisque $y_2 = Abs - Abs_{ref}$.

L'essai est divisé en quatre parties principales :

- Pour $t \in [0 \text{ s}, 5823 \text{ s}]$, le pilote fonctionne en boucle ouverte avec une puissance constante de 160 W pour atteindre le point de fonctionnement.
- Pour $t \in]5823 \text{ s}, 12900 \text{ s}]$, le schéma de commande de la figure 3.23 est appliqué. L'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} est à une valeur constante de 1.5.
- Pour $t \in]12900 \text{ s}, 19000 \text{ s}]$, l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} subit une perturbation positive en échelon pour atteindre la valeur de 1.75.
- Pour $t \in]19000 \text{ s}, 27620 \text{ s}]$, l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} subit une perturbation négative en échelon pour atteindre la valeur de 1.3.

Les résultats expérimentaux de la commande directe avec la commande H_∞ sont présentés sur la figure 3.26.

La loi de commande obtenue par l'approche H_∞ permet de réguler l'absorbance autour de la valeur 0.5. Le correcteur fournit un bon rejet des perturbations sur l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} .

3.4 Bilan énergétique de la commande directe

Comparons précisément l'implémentation en boucle fermée avec un fonctionnement en boucle ouverte. Considérons l'échelon positif de l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} . Ceci correspond à une augmentation de DCO de 117mg/L pour la commande optimale et de 85mg/L pour la commande H_∞ . Notons que :

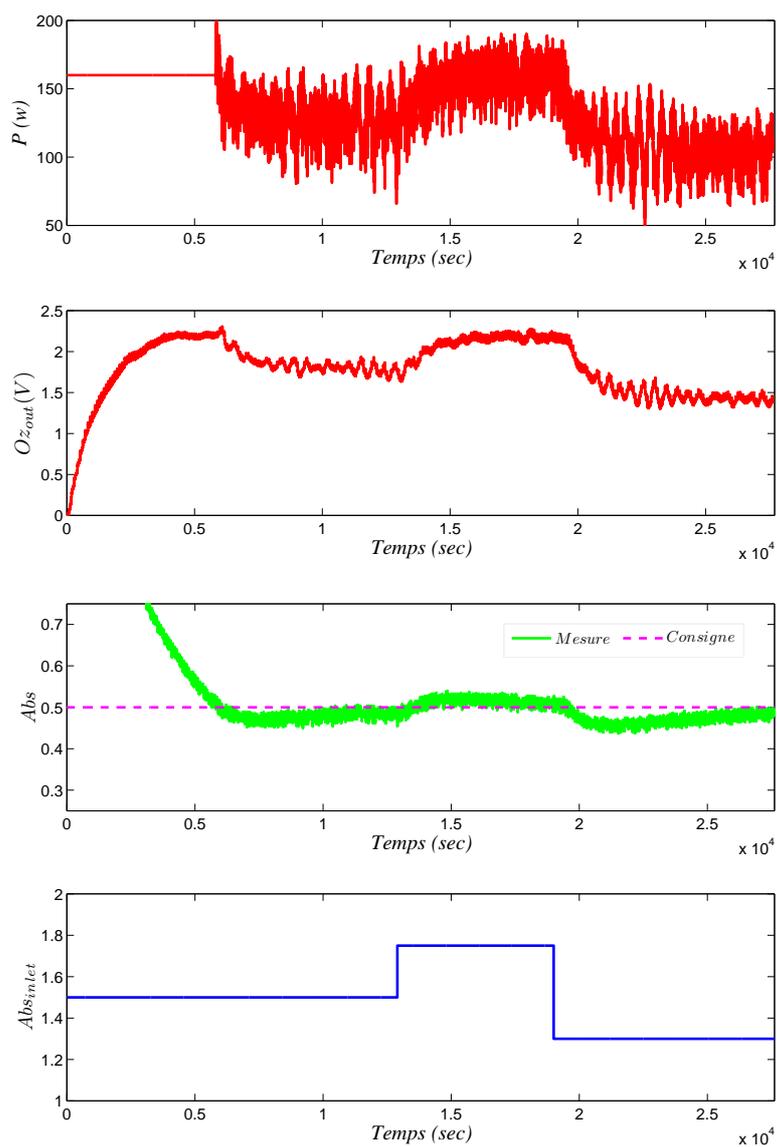


FIGURE 3.26 – Résultats de la commande directe de Abs avec l'approche commande H_{∞}

- le débit de l'effluent traité est de $25 L/h$,
- le débit de gaz est de $0.057 Nm^3/h$,
- en boucle ouverte (conditions expérimentales du paragraphe 1.6.2), la destruction de $1 g$ de DCO requiert $1.4 g$ d'ozone,
- un tiers d'ozone ne réagit pas
- et $1W \Leftrightarrow 1g/Nm^3$ d'ozone.

Dans ces conditions, la puissance additionnelle en boucle ouverte, pour traiter les augmentations de DCO citées ci-dessus, serait de $108W$ et $79W$, respectivement. En boucle fermée, la puissance additionnelle a été de $45W$ pour la commande optimale et de $35W$ pour la commande H_∞ . Ce qui permet de conclure à une réduction de 60% d'ozone consommée pour la commande optimale et de 55% pour la commande H_∞ pour la portion de l'essai correspondant à l'échelon positif étudié.

Une économie de 55% ou 60% paraît très optimiste. Le développement ci-dessus, qui mène à cette conclusion, est probablement très approximatif, et les valeurs de puissance en boucle ouverte sont sur-estimées.

Considérons un autre raisonnement. Supposons que la puissance fixée en boucle ouverte soit égale à la puissance donnée par le correcteur en régime établi pour la valeur maximale de Abs_{inlet} , c'est-à-dire l'échelon positif considéré ci-dessus. Cette puissance en boucle ouverte est représentée par un trait pointillé vert sur la figure 3.27 dans le cas de la commande optimale. Le gain du système régulé sur le système en boucle ouverte est de 25% pour la commande optimale et de 20% pour la commande H_∞ .

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux schémas de commande ont été proposés et trois méthodes ont été utilisées pour le calcul des lois de commande : la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ . L'analyse de la stabilité vis-à-vis des retards, non pris en compte dans la synthèse des correcteurs, a été faite. Les essais expérimentaux ont validé ces schémas de commande. On peut constater que l'absorbance est bien régulée autour de la valeur désirée de 0.5, correspondant à un abattement de 30% de la DCO. Le schéma de commande directe de l'absorbance permet le rejet des perturbations sur l'absorbance de l'effluent à traiter Abs_{inlet} .

La démarche de synthèse d'une loi de commande appliquée dans ce chapitre est basée sur un modèle linéaire du pilote d'ozonation catalytique. Avant l'essai expérimental, plusieurs réglages de correcteur sont testés en simulation grâce au modèle non linéaire du pilote afin de limiter le risque d'essais infructueux.

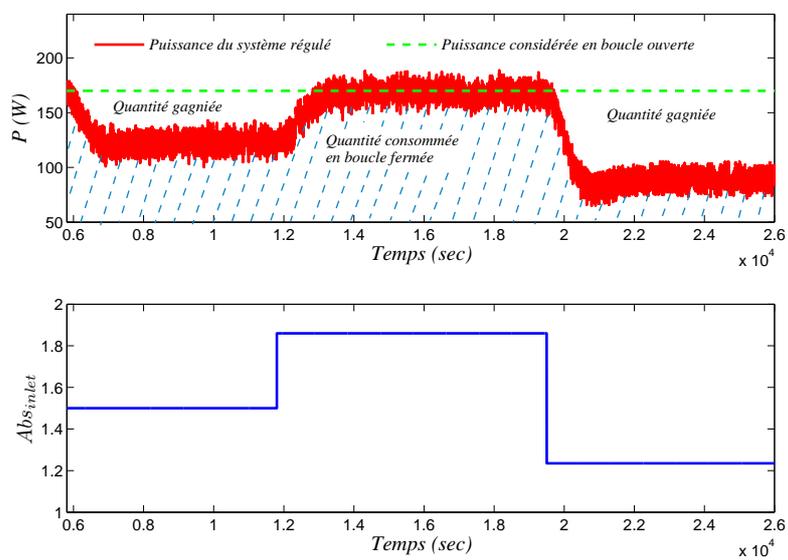


FIGURE 3.27 – Calcul du gain du système régulé sur le système en boucle ouverte

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette thèse a été consacrée à l'optimisation d'un procédé de traitement des eaux par ozonation catalytique.

Une présentation détaillée du traitement des eaux, en général, et des procédés d'oxydation avancée et de l'ozonation catalytique, en particulier, a été réalisée. Une unité pilote d'ozonation catalytique, présentant un réacteur continu de 19 litres, a été instrumentée. Les expériences d'ozonation ont été réalisées sur des solutions aqueuses de paranitrophénol. Préalablement à l'identification et à la commande de ce procédé, un long travail a permis la mise au point d'un capteur basé sur la mesure d'absorbance capable de représenter la DCO et le niveau d'abattement du polluant (Edzwald *et al.* (1985)). De là, le pilote d'ozonation catalytique a été considéré, dans une approche système, comme un système présentant une entrée, la puissance de l'ozonneur, et deux sorties, l'ozone dans les événements et l'absorbance.

L'optimisation du procédé, principal objectif de la thèse, nécessite de diminuer le coût du fonctionnement tout en atteignant les objectifs de rejet spécifiés. L'idée principale est de maintenir l'absorbance autour d'une valeur donnée correspondant à un certain pourcentage d'abattement du polluant, de limiter la concentration d'ozone en excès dans les événements et de rejeter les perturbations, qui peuvent intervenir durant le fonctionnement, telles que les variations de la concentration du polluant.

La première étape a été consacrée à la modélisation du procédé. Un modèle linéaire, de type fonction de transfert à temps continu et à retard pur, a été identifié. La précision obtenue est suffisante pour construire les lois de commande. Un modèle non linéaire dit de Wiener a également été identifié. Ce modèle, plus précis que le modèle linéaire, a permis la mise au point d'un simulateur pour le test des correcteurs avant les tests expérimentaux.

Dans une seconde étape, deux approches de commande ont été proposées pour optimiser le procédé : la commande par hystérésis et la commande directe de l'ab-

sorbance. Pour le calcul des lois de commande, trois méthodes ont été considérées et implémentées : la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ . Dans la synthèse du correcteur, les retards purs estimés n'ont pas été pris en compte. Une analyse de stabilité a été faite pour étudier l'influence de ces retards sur le système en boucle fermée. Des tests expérimentaux ont permis de valider les schémas de commande. De meilleures performances sont obtenues avec la commande directe de l'absorbance avec un correcteur calculé par la méthode de la commande optimale ou de la commande H_∞ . Cependant, de par sa simplicité de mise en œuvre, la commande par hystérésis avec la méthode de la commande par modèle interne reste un outil attrayant en génie chimique.

Aujourd'hui les installations industrielles du type ozonation catalytique, fonctionnant en boucle ouverte, sont généralement surdimensionnées de plus de 20 % pour faire face à la variabilité de l'effluent à traiter, d'où un surcoût en investissement (Pontlevoy (2012)). Du côté coût de fonctionnement, les pertes sont également très importantes ; en fonction de la variabilité de l'effluent à traiter, parfois plus 95 % de l'ozone produit peut être retrouvé dans les événements, alors que quelques pourcents suffisent pour assurer un traitement efficace. Le développement d'une régulation telle que celles présentées dans ce mémoire de thèse doit permettre une économie significative aussi bien en investissement qu'en fonctionnement.

Plus généralement, le second objectif de cette thèse était de montrer l'intérêt des outils de l'automatique moderne pour le génie chimique. La procédure d'identification et de commande, développée pour le pilote d'ozonation catalytique, peut être étendue à d'autres procédés chimiques. Citons, par exemple, Oller *et al.* (2011) qui recense les procédés d'oxydation avancée combinés aux traitements biologiques, et pour qui le principal frein à l'application industrielle de certains procédés est le coût de fonctionnement élevé. On peut espérer qu'avec de tels développements ces technologies puissent avoir une meilleure place parmi les procédés de traitement des eaux.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées.

Une perspective immédiate sur le pilote serait de considérer de eaux résiduaires industrielles. Effectivement, la solution aqueuse de paranitrophénol est une solution de synthèse qui est présente dans certains effluents industriels. Cependant, cette seule molécule ne reflète que très partiellement les eaux usées rencontrées dans le milieu industriel.

Une autre perspective, en cours d'implémentation, est de considérer le temps de séjour comme une seconde entrée de commande sur le pilote d'ozonation catalytique. Cette seconde entrée doit permettre une bien meilleure optimisation puisqu'elle adapterait le débit d'eau traitée à la concentration du polluant à traiter. La

double commande, puissance de l'ozoneur et débit d'eau traitée, devrait déboucher sur une application attendue par les industriels. De plus, ce système à deux entrées et deux sorties offre un beau challenge pour les automaticiens.

Bien évidemment, il faut considérer le passage à une taille industrielle. En ce sens, l'automatisation du réacteur industriel d'ozonation catalytique (Technavox Patent n° FR 0300259) d'un volume de 300 litres, développé par la société Technavox SEREP, pourrait être envisagée.

Du point de vue automatique, des lois de commande tenant compte des retards et/ou des non linéarités peuvent également faire l'objet de nouveaux développements.

Enfin, du point de vue instrumentation, le développement de capteurs logiciels basés sur l'estimation paramétrique permettrait d'élargir le procédé d'ozonation catalytique à différents types d'industrie. Effectivement, les eaux résiduaires industrielles présentent des propriétés bien différentes en fonction du secteur considéré. Les premiers essais réalisés sur des eaux industrielles, résultats non présentés dans ce mémoire, ont montré une non linéarité dans le lien absorbance/DCO. L'estimation de cette non linéarité lors de l'installation du procédé ou lors d'un calage périodique pourrait déboucher sur la mise au point d'un capteur logiciel. Les approches dans ce domaine sont nombreuses; citons, par exemple, des techniques appliquées à des procédés biologiques (Alcaraz-Gonzalez *et al.* (2002); Theilliol *et al.* (2003)) ou dédiées métrologie pour l'efficacité énergétique (Hadid *et al.* (2013a,b)).

PREUVES DES THÉORÈMES

Les théorèmes 3.1 et 3.2 sont des adaptations au cas d'un système à deux retards purs, agissant sur des sorties distinctes, des théorèmes établis dans He *et al.* (2002) et Kim (2011), respectivement.

Les démonstrations ci-dessous font appel à l'approche de Lyapunov-Krasovskii qui consiste à définir une fonctionnelle $V(x_t)$ positive et à déterminer les conditions qui rendent la dérivée de $V(x_t)$ négative le long de la trajectoire $x(t)$.

Notons que, dans le calcul de la dérivée de la fonction $V(x_t)$, on utilise la relation suivante (Rugh (1998))

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t, s) ds = \dot{b}f(t, b) - \dot{a}f(t, a) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) ds \quad (\text{A.1})$$

A.1 Preuve du théorème 3.1

Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\tau_1}x(t - \tau_1(t)) + A_{\tau_2}x(t - \tau_2(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_{max}, 0] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la condition initiale $\phi(t)$ correspond à une fonction continue pour $t \in [-h_{max}, 0]$, $h_{max} = \max(h_1, h_2)$, $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ sont des retards purs variant dans le temps soumis aux contraintes suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau_i(t) \leq h_i, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall t \geq 0 \\ |\dot{\tau}_i(t)| &\leq \mu_i < 1, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante (adaptation de la fonction-

nelle proposée dans He *et al.* (2002))

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s)Q_2x(s)ds \\ & + \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)dsd\theta + \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

avec les matrices de dimension $(n \times n)$ $P = P^T > 0$, $Q_1 = Q_1^T \geq 0$, $Q_2 = Q_2^T \geq 0$, $Z_1 = Z_1^T \geq 0$ et $Z_2 = Z_2^T \geq 0$.

Calculons la dérivée de $V(x_t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Q_1x(t) + x^T(t)Q_2x(t) \\ & - (1 - \dot{\tau}_1(t))x^T(t - \tau_1(t))Q_1x(t - \tau_1(t)) \\ & - (1 - \dot{\tau}_2(t))x^T(t - \tau_2(t))Q_2x(t - \tau_2(t)) \\ & + h_1\dot{x}^T(t)Z_1\dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ & + h_2\dot{x}^T(t)Z_2\dot{x}(t) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds \\ \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Q_1x(t) + x^T(t)Q_2x(t) \\ & - (1 - \mu_1)x^T(t - \tau_1(t))Q_1x(t - \tau_1(t)) \\ & - (1 - \mu_2)x^T(t - \tau_2(t))Q_2x(t - \tau_2(t)) \\ & + h_1\dot{x}^T(t)Z_1\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ & + h_2\dot{x}^T(t)Z_2\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_2(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Selon la formule de Leibniz-Newton, on a

$$x(t) - x(t - \tau_1(t)) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{x}(s)ds = 0 \quad (\text{A.6})$$

et

$$x(t) - x(t - \tau_2(t)) - \int_{t-\tau_2(t)}^t \dot{x}(s)ds = 0 \quad (\text{A.7})$$

Puisque les deux équations ci-dessus sont nulles, il est clair que, pour des matrices de dimension $(n \times n)$ N_{1i} ($i = 1, 2, 3, 4$), on obtient

$$\begin{aligned} & 2 \left[x^T(t)N_{11} + x^T(t - \tau_1(t))N_{12} + x^T(t - \tau_2(t))N_{13} + \dot{x}^T(t)N_{14} \right] \cdot \\ & \left[x(t) - x(t - \tau_1(t)) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou encore, pour des matrices $(n \times n)$ N_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$2 \left[x^T(t)N_{21} + x^T(t - \tau_1(t))N_{22} + x^T(t - \tau_2(t))N_{23} + \dot{x}^T(t)N_{24} \right] \cdot \left[x(t) - x(t - \tau_2(t)) - \int_{t-\tau_2(t)}^t \dot{x}(s)ds \right] = 0 \quad (\text{A.9})$$

De plus, selon l'équation du système (A.2) et pour des matrices T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de dimension $(n \times n)$, on a l'équation suivante

$$2 \left[x^T(t)T_1 + x^T(t - \tau_1(t))T_2 + x^T(t - \tau_2(t))T_3 + \dot{x}^T(t)T_4 \right] \cdot \left[\dot{x}(t) - Ax(t) - A_{\tau_1}x(t - \tau_1(t)) - A_{\tau_2}x(t - \tau_2(t)) \right] = 0 \quad (\text{A.10})$$

également nulle.

D'autre part, pour X une matrice définie semi positive de dimension $(4n \times 4n)$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} & X_{34} \\ X_{14}^T & X_{24}^T & X_{34}^T & X_{44} \end{bmatrix} \geq 0$$

on a

$$h_1 \eta^T(t)X\eta(t) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta^T(t)X\eta(t)ds \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

où

$$\eta(t) = \left[x^T(t) \ x^T(t - \tau_1(t)) \ x^T(t - \tau_2(t)) \ \dot{x}^T(t) \right]^T$$

De même, pour L une matrice définie semi positive de dimension $(4n \times 4n)$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} \end{bmatrix} \geq 0$$

on a

$$h_2 \eta^T(t)L\eta(t) - \int_{t-\tau_2(t)}^t \eta^T(t)L\eta(t)ds \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

En ajoutant les termes de gauche des équations (A.8 - A.12) à $\dot{V}(x_t)$, on peut exprimer $\dot{V}(x_t)$ comme suit

$$\dot{V}(x_t) \leq \eta^T(t)\Xi\eta(t) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \zeta^T(t, s)\Psi_1\zeta(t, s)ds - \int_{t-\tau_2(t)}^t \zeta^T(t, s)\Psi_2\zeta(t, s)ds \quad (\text{A.13})$$

où

$$\zeta(t, s) = [\eta^T(t) \dot{x}^T(s)]$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13}^T & \Gamma_{23}^T & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14}^T & \Gamma_{24}^T & \Gamma_{34}^T & \Gamma_{44} \end{bmatrix} + h_1 X + h_2 L, \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & N_{11} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} & X_{24} & N_{12} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} & X_{34} & N_{13} \\ X_{14}^T & X_{24}^T & X_{34}^T & X_{44} & N_{14} \\ N_{11}^T & N_{12}^T & N_{13}^T & N_{14}^T & Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & N_{21} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} & N_{22} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} & N_{23} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} & N_{24} \\ N_{21}^T & N_{22}^T & N_{23}^T & N_{24}^T & Z_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= Q_1 + Q_2 + N_{11} + N_{11}^T + N_{21} + N_{21}^T - T_1 A - A^T T_1^T \\ \Gamma_{12} &= -N_{11} - T_1 A_{\tau_1} + N_{12}^T + N_{22}^T - A^T T_2^T \\ \Gamma_{13} &= -N_{21} - T_1 A_{\tau_2} + N_{13}^T + N_{23}^T - A^T T_3^T \\ \Gamma_{14} &= P + T_1 + N_{14}^T + N_{24}^T - A^T T_4^T \\ \Gamma_{22} &= -(1 - \mu_1) Q_1 - N_{12} - N_{12}^T - T_2 A_{\tau_1} - A_{\tau_1}^T T_2^T \\ \Gamma_{23} &= -N_{22} - T_2 A_{\tau_2} - N_{13}^T - A_{\tau_1}^T T_3^T \\ \Gamma_{24} &= T_2 - N_{14}^T - A_{\tau_1}^T T_4^T \\ \Gamma_{33} &= -(1 - \mu_2) Q_2 - N_{23} - N_{23}^T - T_3 A_{\tau_2} - A_{\tau_1}^T T_3^T \\ \Gamma_{34} &= T_3 - N_{24}^T - A_{\tau_2}^T T_4^T \\ \Gamma_{44} &= h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + T_4 + T_4^T \end{aligned}$$

Si $\Xi < 0$, $\Psi_1 \geq 0$ et $\Psi_2 \geq 0$, alors $\dot{V}(x_t) < -\epsilon \|x(t)\|^2$ pour une valeur de ϵ suffisamment petite, ce qui assure la stabilité asymptotique du système (A.2).

Si on suppose que $Z_1 > 0$ et $Z_2 > 0$ et si on choisit X et L comme suit

$$X = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{14} \end{bmatrix} Z_1^{-1} \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{14} \end{bmatrix}^T, \quad L = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ N_{23} \\ N_{24} \end{bmatrix} Z_2^{-1} \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ N_{23} \\ N_{24} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.14})$$

alors $\Psi_1 \geq 0$ et $\Psi_2 \geq 0$ selon le complément de Schur (Boyd *et al.* (1994)).

Il reste à prouver que $\Xi < 0$. Or, on a

$$h_1 X + h_2 L = - \begin{bmatrix} h_1 N_{11} & h_2 N_{21} \\ h_1 N_{12} & h_2 N_{22} \\ h_1 N_{13} & h_2 N_{23} \\ h_1 N_{14} & h_2 N_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -h_2 Z_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1 N_{11} & h_2 N_{21} \\ h_1 N_{12} & h_2 N_{22} \\ h_1 N_{13} & h_2 N_{23} \\ h_1 N_{14} & h_2 N_{24} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.15})$$

Donc, selon le complément de Schur (Boyd *et al.* (1994)), la condition $\Xi < 0$ correspond à

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & h_1 N_{11} & h_2 N_{21} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & h_1 N_{12} & h_2 N_{22} \\ \Gamma_{13}^T & \Gamma_{23}^T & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & h_1 N_{13} & h_2 N_{23} \\ \Gamma_{14}^T & \Gamma_{24}^T & \Gamma_{34}^T & \Gamma_{44} & h_1 N_{14} & h_2 N_{24} \\ h_1 N_{11}^T & h_1 N_{12}^T & h_1 N_{13}^T & h_1 N_{14}^T & -h_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ h_2 N_{21}^T & h_2 N_{22}^T & h_2 N_{23}^T & h_2 N_{24}^T & \mathbf{0} & -h_2 Z_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.16})$$

et, après quelques manipulations algébriques, la LMI (A.16) peut être exprimée sous la forme suivante ¹

$$\text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} N_{11} & N_{21} & T_1 \\ N_{12} & N_{22} & T_2 \\ N_{13} & N_{23} & T_3 \\ N_{14} & N_{24} & T_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_2 \mathbf{I} \\ -A & -A_{\tau_1} & -A_{\tau_2} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(1 - \mu_1) Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(1 - \mu_2) Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (h_1 Z_1 + h_2 Z_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -h_1 Z_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -h_2 Z_2 \end{bmatrix} < 0$$

soit la LMI définie dans le théorème 3.1.

A.2 Preuve du théorème 3.2

Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\tau_1} x(t - \tau_1(t)) + A_{\tau_2} x(t - \tau_2(t)) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_{max}, 0] \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la condition initiale $\phi(t)$ est une fonction continument dérivable, $h_{max} = \max(h_1, h_2)$, $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ sont des retards purs variant dans le temps soumis aux contraintes suivantes

$$\begin{aligned} \underline{h}_i &\leq \tau_i(t) \leq \bar{h}_i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall t \geq 0 \\ |\dot{\tau}_i(t)| &\leq \mu_i \leq \infty, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

¹En considérant que $\text{Sym}\{X\} = X + X^T$

Dans la fonctionnelle (A.4) tirée de He *et al.* (2002), les trois variables $x(t)$, $x(s)$, $\dot{x}(s)$ sont traitées indépendamment dans des termes quadratiques. L'idée clé de Kim (2011) est de définir une nouvelle fonctionnelle en croisant les variables entre elles et en considérant des intégrales multiples afin de réduire le conservatisme.

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante (adaptation de la fonctionnelle proposée dans Kim (2011))

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= \chi^T(t)P\chi(t) \\
&+ \int_{t-\tau_1}^t \phi^T(t,s)\{[E_1 \ E_2] Q_1 [E_1 \ E_2]^T\}\phi(t,s)ds \\
&+ \int_{t-\bar{h}_1}^t \phi^T(t,s)\{[E_1 \ E_2] Q_2 [E_1 \ E_2]^T + (\bar{h}_1 - t + s) [E_2 \ E_3] Q_3 [E_2 \ E_3]^T \\
&+ (\bar{h}_1 - t + s)^2 E_3 R_1 E_3^T + (\bar{h}_1 - t + s)^3 E_3 R_2 E_3^T\}\phi(t,s)ds \\
&+ \int_{t-\tau_2}^t \phi^T(t,s)\{[E_1 \ E_2] Q_4 [E_1 \ E_2]^T\}\phi(t,s)ds \\
&+ \int_{t-\bar{h}_2}^t \phi^T(t,s)\{[E_1 \ E_2] Q_5 [E_1 \ E_2]^T + (\bar{h}_2 - t + s) [E_2 \ E_3] Q_6 [E_2 \ E_3]^T \\
&+ (\bar{h}_2 - t + s)^2 E_3 R_3 E_3^T + (\bar{h}_2 - t + s)^3 E_3 R_4 E_3^T\}\phi(t,s)ds
\end{aligned} \tag{A.19}$$

avec $P > 0$, une matrice symétrique $3n \times 3n$, $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 > 0$, des matrices symétriques $2n \times 2n$, $R_1, R_2, R_3, R_4 > 0$, des matrices $n \times n$, et où

$$\begin{aligned}
\chi^T(t) &= \begin{bmatrix} x^T(t) & \int_{t-\bar{h}_1}^t x^T(s)ds & \int_{t-\bar{h}_2}^t x^T(s)ds \end{bmatrix}, \quad \chi^T(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 3n} \\
\phi^T(t,s) &= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(s) & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3n} \\
E_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (i-1)n} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times (3-i)n} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{A.20}$$

La démonstration ci-dessous se base sur les lemmes suivants.

Lemme A.1.

Supposons qu'on ait la fonction quadratique suivante

$$f(\alpha, \beta) = \xi_t^T X_0 \xi_t + \alpha \xi_t^T X_1 \xi_t + \beta \xi_t^T X_2 \xi_t + \alpha^2 \xi_t^T X_{11} \xi_t + \beta^2 \xi_t^T X_{22} \xi_t \tag{A.21}$$

où $X_0, X_1, X_2, X_{11}, X_{22}$ sont des matrices symétriques et ξ_t est un vecteur.

Si $X_{11} \geq 0$, $X_{22} \geq 0$, $f(\alpha_1, \beta_1) < 0$, $f(\alpha_2, \beta_2) < 0$, $f(\alpha_1, \beta_2) < 0$ et $f(\alpha_2, \beta_1) < 0$, alors $f(\alpha, \beta) < 0$ pour $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ et $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$.

Preuve : Il est évident que $f(\alpha, \beta)$ est une fonction quadratique convexe puisque les dérivées secondes partielles

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} f(\alpha, \beta) = 2\xi_t^T X_{11} \xi_t \geq 0 \text{ et } \frac{d^2}{d\beta^2} f(\alpha, \beta) = 2\xi_t^T X_{22} \xi_t \geq 0$$

Lemme A.2. (*Kim (2011)*)

Supposons $W > 0$, une matrice de dimension appropriée, et $g(s)$, un vecteur. On a alors les propriétés suivantes pour toutes les fonctions scalaires $\varphi(s) \geq 0$, $\forall s \in [t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} (i) - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) g^T(s) W g(s) ds &\leq \gamma_1 \xi_t^T M_1^T W^{-1} M_1 \xi_t + 2 \xi_t^T M_1^T \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) g(s) ds \\ (ii) - \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(s) g^T(s) W g(s) ds &\leq \gamma_2 \xi_t^T M_2^T W^{-1} M_2 \xi_t + 2 \xi_t^T M_2^T \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) g(s) ds \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où les matrices M_1 , M_2 et le vecteur ξ_t (indépendants de la variable d'intégration) sont arbitraires et de dimension appropriée, et $\gamma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s) ds$, $\gamma_2 = t_2 - t_1$.

Pour trouver les conditions de stabilité du système, il faut déterminer les conditions qui rendent la dérivée de $V(x_t)$ négative. Calculons $\dot{V}(x_t)$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) = & 2 \left[x^T(t) \int_{t-\bar{h}_1}^{t-\tau_1(t)} x^T(s) ds + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) ds \int_{t-\bar{h}_2}^{t-\tau_2(t)} x^T(s) ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) ds \right] P \left[\dot{x}^T(t) \quad x^T(t) - x^T(t-\bar{h}_1) \quad x^T(t) - x^T(t-\bar{h}_2) \right]^T \\
& + 2 \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] [E_1 \quad E_2] Q_1 [E_1 \quad E_2]^T \left[\int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(t) ds \quad \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{x}^T(s) ds \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] [E_1 \quad E_2] Q_1 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& - (1 - \dot{\tau}_1(t)) \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau_1(t)) \quad \dot{x}^T(t-\tau_1(t)) \right] [E_1 \quad E_2] Q_1 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau_1(t)) \quad \dot{x}^T(t-\tau_1(t)) \right]^T \\
& + 2 \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] [E_1 \quad E_2] Q_2 [E_1 \quad E_2]^T \left[\int_{t-\bar{h}_1}^t x^T(t) ds \quad \int_{t-\bar{h}_1}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-\bar{h}_1}^t \dot{x}^T(s) ds \right]^T \\
& + \int_{t-\bar{h}_1}^t \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] \left\{ (\bar{h}_1 - t + s) [E_2 \quad E_3] Q_3 [E_2 \quad E_3]^T + (\bar{h}_1 - t + s)^2 E_3 R_1 E_3^T + (\bar{h}_1 - t + s)^3 E_3 R_2 E_3^T \right\} \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right]^T ds \\
& + \int_{t-\bar{h}_1}^t \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right] \left\{ - [E_2 \quad E_3] Q_3 [E_2 \quad E_3]^T - 2(\bar{h}_1 - t + s) E_3 R_1 E_3^T - 3(\bar{h}_1 - t + s)^2 E_3 R_2 E_3^T \right\} \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right]^T ds \\
& + \int_{t-\bar{h}_1}^t \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right] \left\{ (\bar{h}_1 - t + s) [E_2 \quad E_3] Q_3 [E_2 \quad E_3]^T + (\bar{h}_1 - t + s)^2 E_3 R_1 E_3^T + (\bar{h}_1 - t + s)^3 E_3 R_2 E_3^T \right\} \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right]^T ds \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] [E_1 \quad E_2] Q_2 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_1 [E_2 \quad E_3] Q_3 [E_2 \quad E_3]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_1^2 E_3 R_1 E_3^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_1^3 E_3 R_2 E_3^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& - \left[x^T(t) \quad x^T(t-\bar{h}_1) \quad \dot{x}^T(t-\bar{h}_1) \right] [E_1 \quad E_2] Q_2 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t-\bar{h}_1) \quad \dot{x}^T(t-\bar{h}_1) \right]^T \\
& + 2 \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] [E_1 \quad E_2] Q_4 [E_1 \quad E_2]^T \left[\int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(t) ds \quad \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-\tau_2(t)}^t \dot{x}^T(s) ds \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] [E_1 \quad E_2] Q_4 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& - (1 - \dot{\tau}_2(t)) \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau_2(t)) \quad \dot{x}^T(t-\tau_2(t)) \right] [E_1 \quad E_2] Q_4 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t-\tau_2(t)) \quad \dot{x}^T(t-\tau_2(t)) \right]^T \\
& + 2 \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] [E_1 \quad E_2] Q_5 [E_1 \quad E_2]^T \left[\int_{t-\bar{h}_2}^t x^T(t) ds \quad \int_{t-\bar{h}_2}^t x^T(s) ds \quad \int_{t-\bar{h}_2}^t \dot{x}^T(s) ds \right]^T \\
& + \int_{t-\bar{h}_2}^t \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right] \left\{ (\bar{h}_2 - t + s) [E_2 \quad E_3] Q_6 [E_2 \quad E_3]^T + (\bar{h}_2 - t + s)^2 E_3 R_3 E_3^T + (\bar{h}_2 - t + s)^3 E_3 R_4 E_3^T \right\} \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right]^T ds \\
& + \int_{t-\bar{h}_2}^t \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right] \left\{ - [E_2 \quad E_3] Q_6 [E_2 \quad E_3]^T - 2(\bar{h}_2 - t + s) E_3 R_3 E_3^T - 3(\bar{h}_2 - t + s)^2 E_3 R_4 E_3^T \right\} \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right]^T ds \\
& + \int_{t-\bar{h}_2}^t \left[x^T(t) \quad x^T(s) \quad \dot{x}^T(s) \right] \left\{ (\bar{h}_2 - t + s) [E_2 \quad E_3] Q_6 [E_2 \quad E_3]^T + (\bar{h}_2 - t + s)^2 E_3 R_3 E_3^T + (\bar{h}_2 - t + s)^3 E_3 R_4 E_3^T \right\} \left[\dot{x}^T(t) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \right]^T ds \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] [E_1 E_2] Q_5 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_2 [E_2 \quad E_3] Q_6 [E_2 \quad E_3]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_2^2 E_3 R_3 E_3^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T + \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right] \bar{h}_2^3 E_3 R_4 E_3^T \left[x^T(t) \quad x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \right]^T \\
& - \left[x^T(t) \quad x^T(t-\bar{h}_2) \quad \dot{x}^T(t-\bar{h}_2) \right] [E_1 \quad E_2] Q_5 [E_1 \quad E_2]^T \left[x^T(t) \quad x^T(t-\bar{h}_2) \quad \dot{x}^T(t-\bar{h}_2) \right]^T
\end{aligned}$$

Supposons que

$$\xi_t^T = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau_1(t)) & x^T(t - \bar{h}_1) & \int_{t-\bar{h}_1}^{t-\tau_1(t)} x^T(s) ds & \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) ds \\ x^T(t - \tau_2(t)) & x^T(t - \bar{h}_2) & \int_{t-\bar{h}_2}^{t-\tau_2(t)} x^T(s) ds & \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) ds \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Après quelques manipulation algébriques, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & \xi_t^T(t) \{ 2 [e_1 \ e_4 + e_5 \ e_8 + e_9] P [A_c^T \ e_1 - e_3 \ e_1 - e_7]^T \\ & + [e_1 \ e_1] Q_1 [e_1 \ e_1]^T - (1 - \dot{\tau}_1(t)) [e_1 \ e_2] Q_1 [e_1 \ e_2]^T \\ & + 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [\tau_1(t) e_1 \ e_5]^T + [e_1 \ e_1] Q_2 [e_1 \ e_1]^T - [e_1 \ e_3] Q_2 [e_1 \ e_3]^T \\ & + 2 [A_c^T \ e_0] Q_2 [\bar{h}_1 e_1 \ e_4 + e_5]^T + \bar{h}_1 [e_1 \ A_c^T] Q_3 [e_1 \ A_c^T]^T \\ & + A_c^T (\bar{h}_1^2 R_1 + \bar{h}_1^3 R_2) A_c + [e_1 \ e_1] Q_4 [e_1 \ e_1]^T \\ & - (1 - \dot{\tau}_2(t)) [e_1 \ e_6] Q_4 [e_1 \ e_6]^T \\ & + 2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [\tau_2(t) e_1 \ e_9]^T + [e_1 \ e_1] Q_5 [e_1 \ e_1]^T - [e_1 \ e_7] Q_5 [e_1 \ e_7]^T \\ & + 2 [A_c^T \ e_0] Q_5 [\bar{h}_2 e_1 \ e_8 + e_9]^T + \bar{h}_2 [e_1 \ A_c^T] Q_6 [e_1 \ A_c^T]^T \\ & + A_c^T (\bar{h}_2^2 R_3 + \bar{h}_2^3 R_4) A_c \} \xi_t + V_a(x_t) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

où $V_a(x_t)$ est la somme des intégrales définie par

$$\begin{aligned} V_a(x_t) = & - \int_{t-\bar{h}_1}^t \{ \zeta^T(s) Q_3 \zeta(s) + 2(\bar{h}_1 - t + s) \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) + 3(\bar{h}_1 - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) \} ds \\ & - \int_{t-\bar{h}_2}^t \{ \zeta^T(s) Q_6 \zeta(s) + 2(\bar{h}_2 - t + s) \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) + 3(\bar{h}_2 - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_4 \dot{x}(s) \} ds \\ \leq & - \int_{t-\bar{h}_1}^{t-\tau_1(t)} \{ \zeta^T(s) Q_3 \zeta(s) + 2(\bar{h}_1 - t + s) \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) + 3(\bar{h}_1 - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) \} ds \\ & - \int_{t-\tau_1(t)}^t \{ \zeta^T(s) Q_3 \zeta(s) + 2(\tau_1(t) - t + s) \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) + 3(\tau_1(t) - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) \} ds \\ & - \int_{t-\bar{h}_2}^{t-\tau_2(t)} \{ \zeta^T(s) Q_6 \zeta(s) + 2(\bar{h}_2 - t + s) \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) + 3(\bar{h}_2 - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_4 \dot{x}(s) \} ds \\ & - \int_{t-\tau_2(t)}^t \{ \zeta^T(s) Q_6 \zeta(s) + 2(\tau_2(t) - t + s) \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) + 3(\tau_2(t) - t + s)^2 \dot{x}^T(s) R_4 \dot{x}(s) \} ds \\ = & \hat{V}_a(x) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

où $\zeta^T(s) = [x^T(s) \ \dot{x}^T(s)]$. On a utilisé $-(\bar{h}_1 - t + s) \leq -(\tau_1(t) - t + s) \ \forall s \in [t - \tau_1(t), t]$ et $-(\bar{h}_2 - t + s) \leq -(\tau_2(t) - t + s) \ \forall s \in [t - \tau_2(t), t]$.

Appliquons le lemme A.2 à $\hat{V}_a(x_t)$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_a(x) \leq & \xi_t^T \{ (\bar{h}_1 - \tau_1(t)) F_1^T Q_3^{-1} F_1 + 2F_1^T [e_4 \ e_2 - e_3]^T \\
& + (\bar{h}_1 - \tau_1(t))^2 F_2^T R_1^{-1} F_2 + 4F_2^T [(\bar{h}_1 - \tau_1(t)) e_2 - e_4]^T \\
& + 3(\bar{h}_1 - \tau_1(t)) F_3^T R_2^{-1} F_3 + 6F_3^T [(\bar{h}_1 - \tau_1(t)) e_2 - e_4]^T \\
& + \tau_1(t) F_4^T Q_3^{-1} F_4 + 2F_4^T [e_5 \ e_1 - e_2]^T + \tau_1^2(t) F_5^T R_1^{-1} F_5 \\
& + 4F_5^T [\tau_1(t) e_1 - e_5]^T + 3\tau_1(t) F_6^T R_2^{-1} F_6 + 6F_6^T [\tau_1(t) e_1 - e_5]^T \\
& (\bar{h}_2 - \tau_2(t)) F_7^T Q_6^{-1} F_7 + 2F_7^T [e_8 \ e_6 - e_7]^T + (\bar{h}_2 - \tau_2(t))^2 F_8^T R_3^{-1} F_8 \\
& + 4F_8^T [(\bar{h}_2 - \tau_2(t)) e_6 - e_8]^T + 3(\bar{h}_2 - \tau_2(t)) F_9^T R_4^{-1} F_9 \\
& + 6F_9^T [(\bar{h}_2 - \tau_2(t)) e_6 - e_8]^T + \tau_2(t) F_{10}^T Q_6^{-1} F_{10} + 2F_{10}^T [e_9 \ e_1 - e_6]^T \\
& + \tau_2^2(t) F_{11}^T R_3^{-1} F_{11} + 4F_{11}^T [\tau_2(t) e_1 - e_9]^T + 3\tau_2(t) F_{12}^T R_4^{-1} F_{12} \\
& + 6F_{12}^T [\tau_2(t) e_1 - e_9]^T \} \xi_t
\end{aligned} \tag{A.26}$$

On peut noter également que

$$\begin{aligned}
2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [\tau_1(t) e_1 \ e_5]^T &= 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_0 \ e_5]^T + 2\tau_1(t) [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_1 \ e_0]^T \\
2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [\tau_2(t) e_1 \ e_9]^T &= 2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [e_0 \ e_9]^T + 2\tau_2(t) [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_1 \ e_0]^T
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Appliquons (A.26) à (A.24) pour obtenir

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi_t^T \{ \psi_0 + \tau_1(t) \psi_1 + \tau_2(t) \psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2} \} \xi_t \tag{A.28}$$

avec²

$$\begin{aligned}
\psi_0 = & \langle 2 [e_1 \ e_4 + e_5 \ e_8 + e_9] P [A_c^T \ e_1 - e_3 \ e_1 - e_7]^T \rangle_s \\
& + [e_1 \ e_1] (Q_1 + Q_2) [e_1 \ e_1]^T - (1 - \mu_1) [e_1 \ e_2] Q_1 [e_1 \ e_2]^T \\
& - [e_1 \ e_3] Q_2 [e_1 \ e_3]^T + \bar{h}_1 [e_1 \ A_c^T] Q_3 [e_1 \ A_c^T]^T \\
& + A_c^T (\bar{h}_1^2 R_1^2 + \bar{h}_1^3 R_2) A_c + \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_0 \ e_5]^T \\
& + 2 [A_c^T \ e_0] Q_2 [\bar{h}_1 e_1 \ e_4 + e_5]^T + 2F_1^T [e_4 \ e_2 - e_3]^T \\
& + (4F_2^T + 6F_3^T) [\bar{h}_1 e_2 - e_4]^T + 2F_4^T [e_5 \ e_1 - e_2]^T - (4F_5^T + 6F_6^T) e_5^T \rangle_s \\
& + [e_1 \ e_1] (Q_4 + Q_5) [e_1 \ e_1]^T - (1 - \mu_2) [e_1 \ e_6] Q_4 [e_1 \ e_6]^T \\
& - [e_1 \ e_7] Q_5 [e_1 \ e_7]^T + \bar{h}_2 [e_1 \ A_c^T] Q_6 [e_1 \ A_c^T]^T \\
& + A_c^T (\bar{h}_2^2 R_3^2 + \bar{h}_2^3 R_4) A_c + \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_4 [e_0 \ e_9]^T \\
& + 2 [A_c^T \ e_0] Q_5 [\bar{h}_2 e_1 \ e_8 + e_9]^T + 2F_7^T [e_8 \ e_6 - e_7]^T \\
& + (4F_8^T + 6F_9^T) [\bar{h}_2 e_6 - e_8]^T + 2F_{10}^T [e_9 \ e_1 - e_6]^T - (4F_{11}^T + 6F_{12}^T) e_9^T \rangle_s
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\psi_1 = \langle 2 [A_c^T \ e_0] Q_1 [e_1 \ e_0]^T - (4F_2^T + 6F_3^T) e_2^T + (4F_5^T + 6F_6^T) e_1^T \rangle_s \tag{A.30}$$

²En considérant que $\langle \cdot \rangle_s = \frac{1}{2} [(\cdot) + (\cdot)^T]$

$$\psi_2 = \langle 2 [A_c^T \quad e_0] Q_4 [e_1 \quad e_0]^T - (4F_8^T + 6F_9^T)e_6^T + (4F_{11}^T + 6F_{12}^T)e_1^T \rangle_s \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\tau_1} = & (\bar{h}_1 - \tau_1(t))F_1^T Q_3^{-1} F_1 + (\bar{h}_1 - \tau_1(t))^2 F_2^T R_1^{-1} F_2 \\ & + 3(\bar{h}_1 - \tau_1(t))F_3^T R_2^{-1} F_3 + \tau_1(t)F_4^T Q_3^{-1} F_4 + \tau_1^2(t)F_5^T R_1^{-1} F_5 \\ & + 3\tau_1(t)F_6^T R_2^{-1} F_6 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\tau_2} = & (\bar{h}_2 - \tau_2(t))F_7^T Q_6^{-1} F_7 + (\bar{h}_2 - \tau_2(t))^2 F_8^T R_3^{-1} F_8 \\ & + 3(\bar{h}_2 - \tau_2(t))F_9^T R_4^{-1} F_9 + \tau_2(t)F_{10}^T Q_6^{-1} F_{10} + \tau_2^2(t)F_{11}^T R_3^{-1} F_{11} \\ & + 3\tau_2(t)F_{12}^T R_4^{-1} F_{12} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$A_c = [A \quad A_{\tau_1} \quad \mathbf{0}_{n \times 3n} \quad A_{\tau_2} \quad \mathbf{0}_{n \times 3n}] \quad (\text{A.34})$$

$$e_i = [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \quad \mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times (9-i)n}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (\text{A.35})$$

Notons que la fonction scalaire

$$f(\tau_1(t), \tau_2(t)) = \xi_t^T \{ \psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2} \} \xi_t$$

est quadratique sur les deux variables $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ et que

$$\xi_t^T [F_2^T R_1^{-1} F_2 + F_5^T R_1^{-1} F_5] \xi_t \geq 0$$

et

$$\xi_t^T [F_8^T R_3^{-1} F_8 + F_{11}^T R_3^{-1} F_{11}] \xi_t \geq 0$$

car $R_1 > 0$ et $R_3 > 0$.

Par conséquent, $f(\tau_1(t), \tau_2(t)) = \xi_t^T \{ \psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2} \} \xi_t$ est une fonction quadratique convexe pour les deux variables $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$.

Selon la lemme A.1, cette fonction quadratique est toujours négative avec $\tau_1(t) \in [\underline{h}_1, \bar{h}_1]$ et $\tau_2(t) \in [\underline{h}_2, \bar{h}_2]$ si $f(\underline{h}_1, \underline{h}_2) < 0$, $f(\bar{h}_1, \bar{h}_2) < 0$, $f(\underline{h}_1, \bar{h}_2) < 0$ et $f(\bar{h}_1, \underline{h}_2) < 0$.

En appliquant le complément de Schur (Boyd *et al.* (1994)), on obtient les quarte *LMIs* suivantes

$$\begin{cases} [\psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2}]_{\tau_1(t)=\underline{h}_1, \tau_2(t)=\underline{h}_2} < 0 \\ [\psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2}]_{\tau_1(t)=\bar{h}_1, \tau_2(t)=\bar{h}_2} < 0 \\ [\psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2}]_{\tau_1(t)=\underline{h}_1, \tau_2(t)=\bar{h}_2} < 0 \\ [\psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2}]_{\tau_1(t)=\bar{h}_1, \tau_2(t)=\underline{h}_2} < 0 \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Donc, à partir de (A.28), on en déduit que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &\leq \xi_t^T \{ \psi_0 + \tau_1(t)\psi_1 + \tau_2(t)\psi_2 + \Upsilon_{\tau_1} + \Upsilon_{\tau_2} \} \xi_t \\ &< -\hat{\epsilon} \|\xi_t\|^2, \quad \exists \hat{\epsilon} > 0, \\ &\leq -\epsilon \|x(t)\|^2, \quad \exists \epsilon > 0\end{aligned}\tag{A.37}$$

et donc, selon le théorème de la stabilité de Lyapunov-Krasovskii (Gu *et al.* (2003)), le système (A.17) est asymptotiquement stable.

Les quatre *LMI*s définies dans (A.36) sont les LMIs du théorème 3.2. Ce qui complète la preuve.

ANNEXE B

**SCHÉMAS SIMULINK DES COMMANDES
IMPLÉMENTÉES**

Le pilote est équipé d'un système d'acquisition (xPC Target) permettant le prototypage rapide des algorithmes de commande. Les schémas Simulink implémentés sont présentés ci-dessous. Ils doivent permettre à de futurs utilisateurs de facilement tester de nouvelles commandes.

B.1 Commande par hystérésis avec l'approche commande par modèle interne

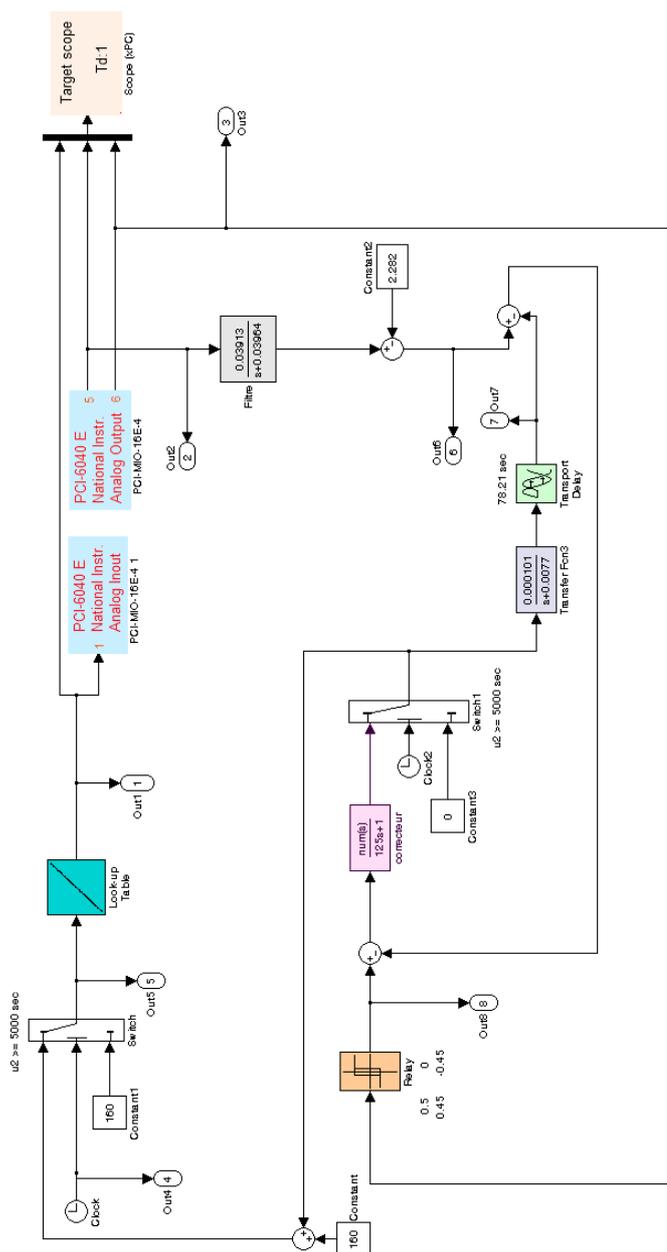


FIGURE B.1 – Schéma Simulink de la commande par hystérésis avec l'approche commande par modèle interne

B.2 Commande par hystérésis avec l'approche commande optimale

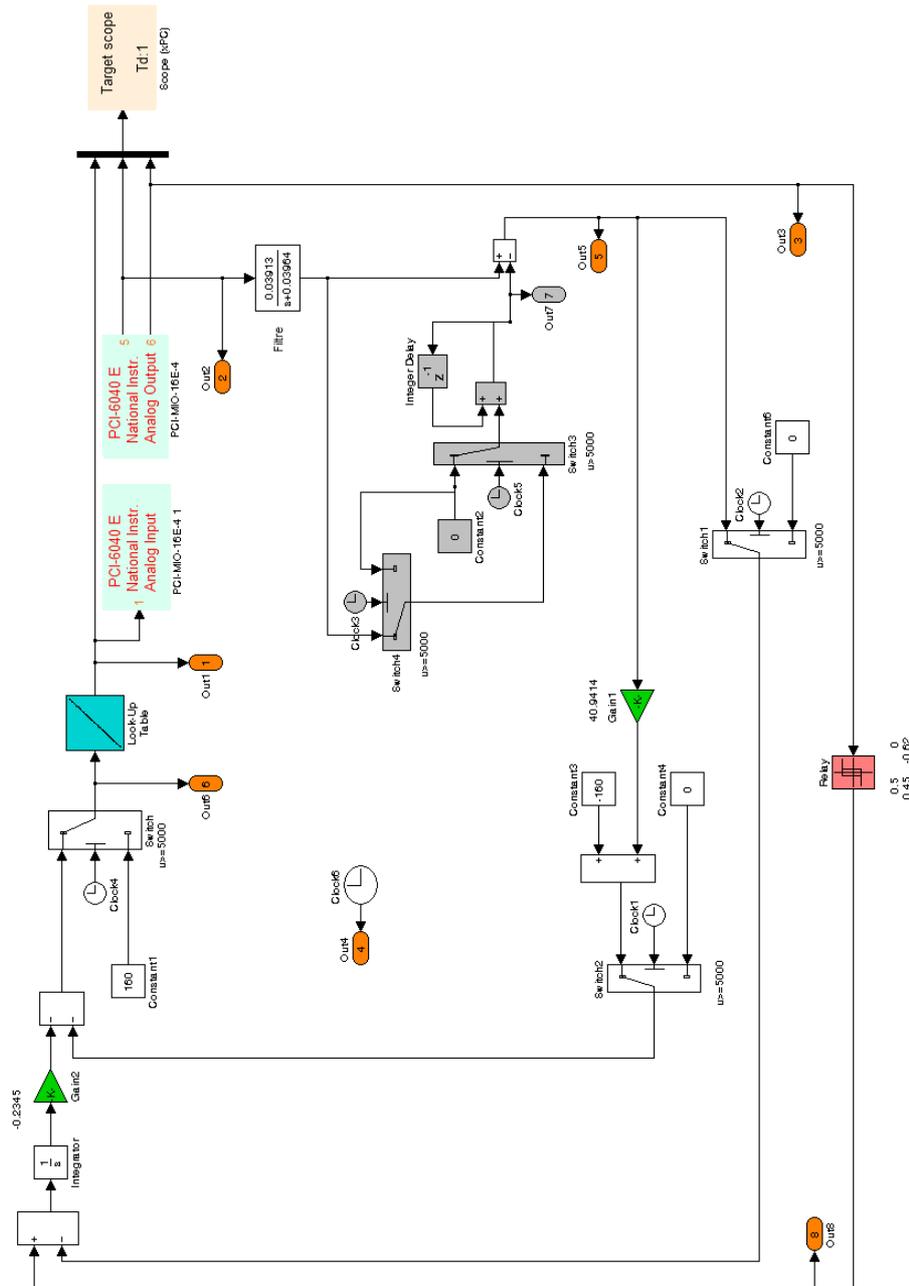


FIGURE B.2 – Schéma Simulink de la commande par hystérésis avec l'approche commande optimale

B.4 Commande directe avec l'approche commande H_∞

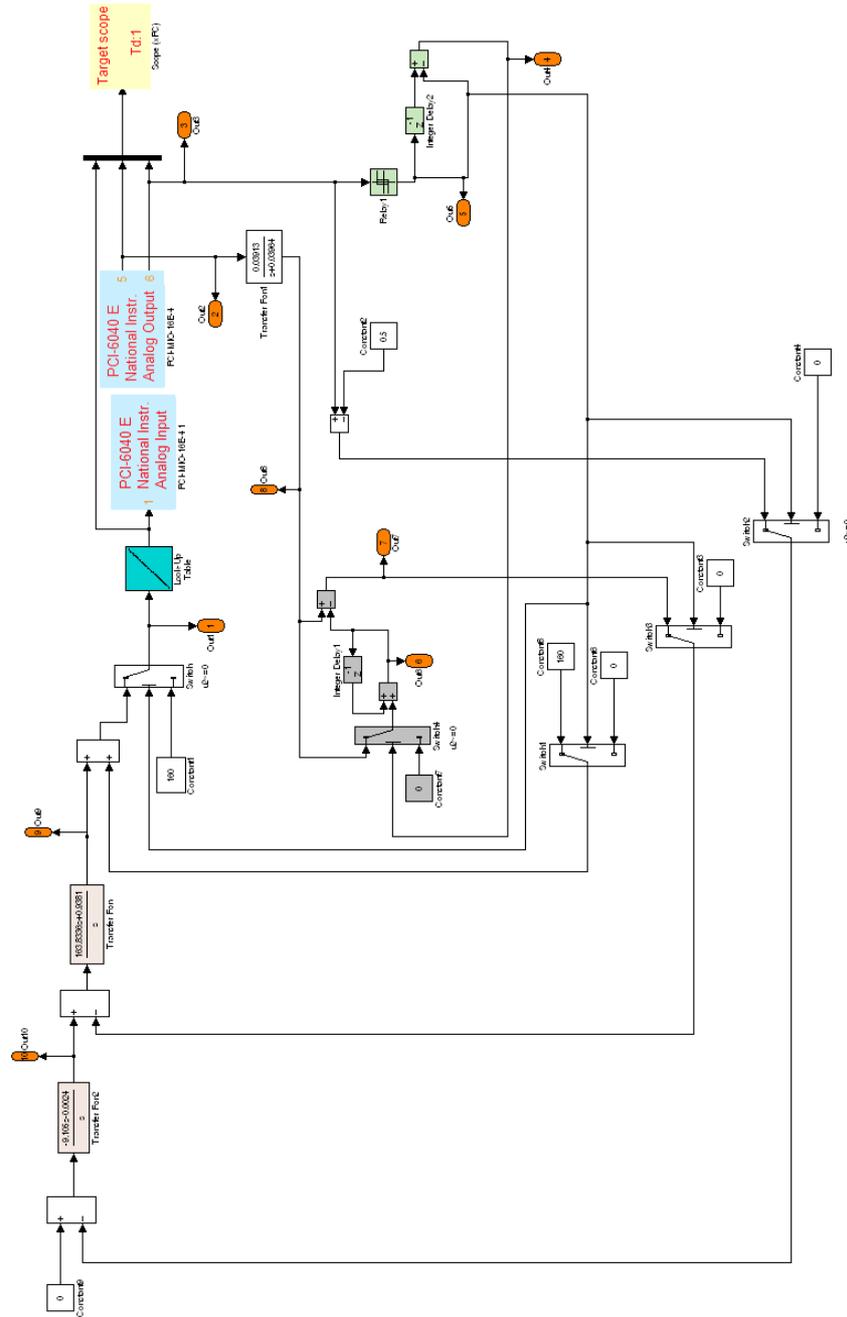


FIGURE B.4 – Schéma Simulink de la commande directe avec l'approche commande H_∞

Bibliographie

- M. ABOUZLAM : Identification des paramètres du système de traitement des eaux par ozonation. Mémoire de D.E.A., Université de Poitiers, 2009.
- M. ABOUZLAM, R. OUVRARD, D. MEHDI, F. PONTLEVOY, B. GOMBERT, N. KARPEL VEL LEITNER et S. O. B. BOUKARI : Identification and control of a wastewater treatment pilot by catalytic ozonation. *In American Control Conference*, Montréal, Canada, June 2012a.
- M. ABOUZLAM, R. OUVRARD, D. MEHDI, F. PONTLEVOY, B. GOMBERT, N. KARPEL VEL LEITNER et S. O. B. BOUKARI : Identification of a wastewater treatment reactor by catalytic ozonation. *In 16th IFAC Symposium on System Identification*, Brussels, Belgium, July 2012b.
- M. ABOUZLAM, R. OUVRARD, D. MEHDI, F. PONTLEVOY, B. GOMBERT, N. KARPEL VEL LEITNER et S. O. B. BOUKARI : An optimal control of a wastewater treatment reactor by catalytic ozonation. *Control Engineering Practice*, 21 (1):105–112, 2013a.
- M. ABOUZLAM, R. OUVRARD, D. MEHDI, F. PONTLEVOY, B. GOMBERT, N. KARPEL VEL LEITNER et S. O. B. BOUKARI : A robust control for wastewater treatment application. *In Third International Conference on Systems and Control*, Algiers, Algeria, October 2013b.
- M. ABOUZLAM, R. OUVRARD, D. MEHDI, F. PONTLEVOY, B. GOMBERT, N. KARPEL VEL LEITNER et S. O. B. BOUKARI : An H_∞ control for optimizing the advanced oxidation processes - Case of a catalytic ozonation reactor. *Soumis à IET Control Theory and Applications*, 2014.
- H. AKAIKE : A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-19 (6):716–723, December 1974.
- N. AL-HAYEK, B. LEGUBE et M. DORÉ : Ozonation catalytique ($Fe(III)/Al_2O_3$) du phénol et de ses produits d'ozonation. *Environmental Technology Letters*, 10 (4):415–426, 1989.

- V. ALCARAZ-GONZALEZ, J. HARMAND, A. RAPAPORT, J. P. STEYER, V. GONZALEZ-ALVAREZ et C. PELAYO-ORTIZ : Software sensors for highly uncertain WWTPs : a new approach based on interval observers. *Water Research*, 36:2515–2524, 2002.
- AMERICAN PUBLIC HEALTH ASSOCIATION AND AMERICAN WATER WORKS ASSOCIATION AND WATER ENVIRONMENT FEDERATION : *Standard methods for the examination of water and wastewater*. American Public Health Association, Washington, D.C., 20th édition, 1998.
- AMERICAN WATER WORKS ASSOCIATION AND AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS : *Water treatment plant design (McGraw-Hill Handbooks)*. McGraw-Hill Professional, 4 édition, 2004.
- A. AMIRTHARAJAH et C. R. O'MELIA : *Water quality and treatment*. American Water Works Association (AWWA), McGraw-Hill, Denver, CO, USA, 5 édition, 1999.
- B. D. O. ANDERSON et J. B. MOORE : *Optimal control : Linear Quadratic methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- R. ANDREOZZI, A. INSOLA, V. CAPRIO et M. G. D'AMORE : The kinetics of Mn(II)-catalysed ozonation of oxalic acid in aqueous solution. *Water Research*, 26 (7):917–921, 1992.
- P. APKARIAN et D. NOLL : Nonsmooth H_∞ synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 51 (1):71–86, 2006.
- R. ASGHARIAN et S. A. TAVAKOLI : A systematic approach to performance weights selection in design of robust H_∞ PSS using genetic algorithms. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 11 (1):111–117, 1996.
- S. BAIG et P. MOUCHET : Oxydation et réduction appliquées au traitement de l'eau - Ozone - Autres oxydants - Oxydation avancée - Réducteurs. *Techniques de l'ingénieur*, w2702, 2010.
- R. W. BEAVEN, M. T. WRIGHT et D. R. SEAWARD : Weighting function selection in the H_∞ design process. *Control Engineering Practice*, 4 (5):625–633, 1996.
- N. BHAT et M. D. GUROL : Oxydation of chlorobenzene by ozone and heterogeneous catalytic ozonation. In *27th Industrial Waste Mid-Atlantic Conference*, page 371, Bethlehem, PA, USA, 1995.
- S. BOYD, L. E. GHAOUI, E. FERON et V. BALAKRISHNAN : *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- Q. M. BUI : *Oxydation de molécules modèles en solution aqueuse par ozonation catalytique*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2009.

- V. CERONE et D. REGRUTO : Parameter bounds evaluation of Wiener models with noninvertible polynomial nonlinearities. *Automatica*, 42:1775–1781, 2006.
- R. C. CHENG, S. LIANG, H. C. WANG et M. D. BEUHLER : Enhanced coagulation for arsenic removal. *Journal of the American Water Works Association*, 86 (9):79–90, 1994.
- N. P. CHEREMISINOFF : *Handbook of water and wastewater treatment techniques*. Butterworth-Heinemann, 2002.
- R. Y. CHIANG et M. G. SAFONOV : *Robust control toolbox user's guide. Version 2*. The MathWorks, 1992.
- J. P. CORRIOU : *Commande des procédés*. Lavoisier, Tec & Doc, Paris, 1996.
- J. P. CORRIOU : *Commande de procédés chimiques. Réacteurs et colonnes de distillation*. Hermès Publications, Paris, 2001.
- J. P. CORRIOU : *Process control - Theory and applications*. Springer-Verlag, London, 2004.
- C. F. CURTISS et J. O. HIRSCHFELDER : Integration of stiff equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38:235–243, 1952.
- M. DORÉ : *Chimie des oxydants et traitement des eaux*. Paris, 1989.
- J.C. DOYLE, K. GLOVER, P.P. KHARGONEKAR et B.A. FRANCIS : State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 (8):831–847, 1989.
- C. DUVANAUD, S. DARDENNE, S. BACHIR et J. C. TRIGEASSOU : Nonlinear internal model control based on cartesian signals for high frequency amplification. *In Workshop on Electronics and System Analysis*, Bilbao, Portugal, January 2004.
- Metcalf & EDDY, Inc. an AECOM COMPANY, T. ASANO, F. BURTON, H. LEVERENZ, R. TSUCHIHASHI et G. TCHOBANOGLIOUS : *Water reuse : issues, technologies, and applications*. McGraw-Hill Professional, New York, 1st édition, 2007.
- J. K. EDZWALD, W. C. BECKER et K. L. WATTIER : Surrogate parameters for monitoring organic matter and trihalomethane precursors. *Journal of the American Water Works Association*, 77 (4):122–131, 1985.
- J. EDZWALD AND AMERICAN WATER WORKS ASSOCIATION : *Water quality & treatment : A handbook on drinking water (Water Resources and Environmental Engineering Series)*. McGraw-Hill Professional, 6th édition, 9 Novembre 2010.
- EPA VICTORIA : Guidelines for environmental management, disinfection of treated wastewater. 2002.

- L. C. EVANS : *An introduction to mathematical optimal control theory*. University of California, Berkeley, 2010.
- C. FOIAS, B. FRANCIS, J. W. HELTON, H. KWAKERNAAK et J. B. PEARSON : *H_∞ -control theory*. Springer-Verlag, 1991.
- L. FRIOT : *Méthodologie de mise en œuvre d'une régulation de climatisation par modèle interne appliquée au transport ferroviaire*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1995.
- P. GAHINET et P. APKARIAN : A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- H. GARNIER, M. MENSLER et A. RICHARD : Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *Int. J. Control*, 76 (13):1337–1357, 2003.
- H. GARNIER et L. WANG : *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer-Verlag, 2008.
- W. H. GLAZE, J.-W. KANG et D. H. CHAPIN : The chemistry of water treatment processes involving ozone, hydrogen peroxide and ultraviolet radiation. *Ozone Science & Engineering*, 9:335–352, 1987.
- P. R. GOGATE et A. B. PANDIT : A review of imperative technologies for wastewater treatment I : oxidation technologies at ambient conditions. *Advances in Environmental Research*, 8:501–551, 2004.
- J. C. GOMEZ et E. BAEYENS : Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases. *Journal of Process Control*, 14:685–697, 2004.
- M. GREEN et D. J. N. LIMEBEER : *Linear robust control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- D. W. GU, P. Hr. PETKOV et M. M. KONSTANTINOV : *Robust control design with Matlab*. Springer, 2005.
- K. GU, V. L. KHARITONOV et J. CHEN : *Stability of time-delay systems*. Control Engineering. Birkhauser, 2003.
- R. HABER et L. KEVICZKY : *Nonlinear system identification - Input-output modeling approach. Volume 1 : Nonlinear system parameter identification*. Kluwer Academic Publishers, 1999a.
- R. HABER et L. KEVICZKY : *Nonlinear system identification - Input-output modeling approach. Volume 2 : Nonlinear system structure identification*. Kluwer Academic Publishers, 1999b.

- B. HADID, E. ETIEN, R. OUVRARD, T. POINOT, L. Le BRUSQUET, A. GRAU et G. SCHMITT : Soft sensor design for power measurement and diagnosis in electrical furnace : a parametric estimation approach. *In 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Vienna, Austria, November 2013a.
- B. HADID, R. OUVRARD, L. Le BRUSQUET, T. POINOT, E. ETIEN et F. SICARD : Modeling for gas flow measurement consumed by a boiler. Towards a low-cost sensor for energy efficiency. *In 7th International Conference on Sensing Technology*, Wellington, New Zealand, December 2013b.
- D. HARVEY : *Modern analytical chemistry*. McGraw-Hill Hier Education, 1999.
- Y. HE, M. WU, J-H. SHE et G-P. LIU : Parameter-dependent lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49 (5):828–832, 2002.
- C. G. HEWES et R. R. DAVINSON : Renovation of wastewater by ozonation. *AIChE Symposium Series*, 69:71–79, 1972.
- L. V. HOANG : *Comparaison des rendements énergétiques de dégradation de trois composés organiques par plusieurs procédés d'oxydation avancés en milieu aqueux*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2009.
- J. HOIGNÉ et H. BADER : Rate constants for reactions of ozone with organic and inorganic compounds in water-I Non dissociating organic compounds. *Water Reasearch*, 17 (2):173–183, 1983.
- J. HOIGNÉ, H. BADER, W. R. HAAG et J. STAEHELIN : Rate constants of reactions of ozone with organic and inorganic compounds in water-III. *Water Research*, 19:993–1004, 1985.
- C. JALLUT, G. THOMAS, Y. TOURÉ et J. P. DIARD : *Automatique et procédés chimiques. Modélisation, estimation, cristallisation*, chapitre Estimation de paramètres physico-chimiques et problèmes inverses, pages 51–104. Hermès Publications, 2001.
- A. D. KALAFATIS, L. WANG et W. R. CLUETT : Identification of time-varying pH processes using sinusoidal signals. *Automatica*, 41:685–691, 2005.
- N. KARPEL VEL LEINER, B. DELOUANE, B. LEGUBE et F. LUCK : Effects of catalysts during ozonation of salicylic acid, peptides and humic substances in aqueous solution. *Ozone Sci.Engin*, 21 (3):261–276, 1999.
- J. KIM : Note on stability of linear systems with time delays. *Automatica*, 47 (9):2118–2121, 2011.
- W. R. KNOCKE, S. WEST et R. C. HOEHN : Effects of low temperature on the removal of trihalomethane precursors by coagulation. *Journal of the American Water Works Association*, 78 (4):189–195, 1986.

- H. KWAKERNAAK : Robust control and H_∞ -optimization – Tutorial paper. *Automatica*, 29:255–273, 1993.
- I. D. LANDAU : Unbiased recursive identification using model reference adaptive techniques. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(2):194–202, April 1976.
- I. D. LANDAU : *Adaptive control : the model reference approach*, volume 8. Marcel Dekker, Control and systems theory, 1979.
- I. D. LANDAU : *Identification et commande des systèmes*. Traité des nouvelles technologies, Hermès, Paris, 1988.
- O. LEGRINI, E. OLIVERSO et A. M. BRAUN : Photochemical processes for water treatment. *Chemical reviews*, 93:671–698, 1993.
- B. LEGUBE et N. KARPEL VEL LEITNER : Catalytic ozonation : a promising advanced oxidation technology for water treatment. *Catalysis Today*, 53:61–72, 1999.
- L. LJUNG : *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 2nd edition, 1999.
- L. LJUNG : Initialisation aspects for subspace and output-error identification methods. *In European Control Conference*, Cambridge, U.K., 2003.
- L. LJUNG et T. SODERSTROM : *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press, London, England, 1983.
- G. S. LOGSDON, V. C. THURMAN, E. S. FRINDT et J. G. STOECKER : Evaluating sedimentation and various filter media for removal of giardia cysts. *Journal of the American Water Works Association*, 77 (2):61–66, 1985.
- F. LUCK, M. DJAFER, N. KARPEL VEL LEITNER, B. GOMBERT et B. LEGUBE : Destruction of pollutants in industrial rinse waters by advanced oxidation processes. *Water Science and Technology*, 35 (4):287–292, 1997.
- D. W. MARQUARDT : An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11:431–441, 1963.
- METCALF AND EDDY, INC. : *Wastewater engineering : Treatment, disposal and reuse*. 4th edition, McGraw-Hill, New York, USA, 2002.
- F. MONROUX : *Méthodologie générale de synthèse de correcteurs par la méthode des moments ; approche mixte : fréquentielle et temporelle*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1999.
- M. MORARI et E. ZAFIRIOU : *Robust process control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

- A. M. NAGY, B. MARX, G. MOUROT, G. SCHUTZ et J. RAGOT : State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant. *Control Engineering Practice*, 19 (11):1354–1362, 2011.
- O. NELLES : *Nonlinear system identification : From classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer, 2001.
- I. OLLER, S. MALATO et J. A. SÁNCHEZ-PÉREZ : Combination of advanced oxidation processes and biological treatments for wastewater decontamination - a review. *Science of the Total Environment*, 409:4141–4166, 2011.
- R. OUVRARD, E. TOHME, T. POINOT et A. ABCHE : Model based on the reinitialised partial moments for initialising output-error identification methods. *IET Control Theory and Applications*, 4 (9):1725–1738, September 2010.
- R. OUVRARD et J. C. TRIGEASSOU : On embedded FIR filter models for identifying continuous-time and discrete-time transfer functions : the RPM approach. *Int. J. Control*, 84 (3):616–632, 2011.
- A. E. PEARSON : Least squares parameter identification of nonlinear differential I/O models. In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1831–1835, Austin, USA, 1988.
- F. PONTLEVOY : Rapport interne. Rapport technique, Technavox, 2012.
- F. PONTLEVOY, N. KARPEL VEL LEITNER et B. LEGUBE : Une innovation parmi les procédés d'élimination de la DCO dure, l'ozonation catalytique. *L'eau, L'industries, Les Nuisances*, 259:24–26, 2003.
- L. PRONZATO et E. WALTER : Eliminating suboptimal local minimizers in nonlinear parameter estimation. *Technometrics*, 43 (4):434–442, 2001.
- A. RACHID et D. MEHDI : *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*. Editions Technip, 1997.
- J. RAGOT, G. GRAPIN, P. CHATELIER et F. COLIN : Modeling of a water treatment plant. A multimodel representation. *Environmetrics*, 12 (7):599–611, 2001.
- V. C. RAO, J. M. SYMONS, A. LING, P. WANG, T. G. METCALF, J. C. HOFF et J. L. MELNICK : Removal of hepatitis a virus and rotavirus by drinking water treatment. *Journal of the American Water Works Association*, 80 (2):59–67, 1988.
- J. RICHALET : *Pratique de l'identification*. Hermès, Paris, 1991.
- J. RICHALET, A. RAULT et R. POULIQUEN : *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon and Breach, 1971.
- W. J. RUGH : *Linear system theory*. Prentice-Hall, 1998.

- S. SAHAJ et H. YOGESH : Advances in internal model control technique : a review and future prospects. *IETE Technical Review*, 29 (6):461–472, 2012.
- C. N. SAWYER, P. L. MCCARTY et G. E. PARKIN : *Chemistry for environmental engineering*. McGraw-Hill, 4th édition, 1994.
- T. SÖDERSTRÖM : On model structure testing in system identification. *Int. J. Control*, 26:1–18, 1977.
- S. SKOGESTAD et I. POSTLETHWAITE : *Multivariable feedback control*. Addison-Wesley, Canada, 1996.
- T. SODERSTORM et P. STOICA : *System identification*. Prentice-Hall, 1989.
- B. SOHLBERG : Grey box modelling for model predictive control of a heating process. *Journal of Process Control*, 13 (3):225–238, 2003.
- K. STEIGLITZ et L. MCBRIDE : A technique for the identification of linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 10 (4):461–464, 1965.
- A. STOORVOGEL : *The H_∞ control problem. A state space approach*. Prentice Hall, 1992.
- S. W. SUNG et J. LEE : Modeling and control of Wiener-type processes. *Chemical Engineering Science*, 59:1515–1521, 2004.
- D. THEILLIOL, J. C. PONSART, J. HARMAND, C. JOIN et P. GRAS : On-line estimation of unmeasured inputs for anaerobic wastewater treatment processes. *Control Engineering Practice*, 11:1007–1019, 2003.
- E. TOHME : *Initialization of output error identification algorithms*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2008.
- E. TOHME, R. OUVRARD, T. POINOT, J. C. TRIGEASSOU et A. ABCHE : Initialization of output-error identification methods - comparison between ARX and RPM models. In *15th IFAC Symposium on System Identification*, pages 302–307, Saint-Malo, France, 2009.
- E. TOHME, R. OUVRARD, J. C. TRIGEASSOU et A. ABCHE : A pseudo-output error algorithm to improve global convergence. In *The 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 659–664, Paris, France, 2006.
- E. TRÉLAT : *Contrôle optimal : Théorie & applications*. Mathématiques concrètes. Vuibert, 2nd édition, 2005.
- J. C. TRIGEASSOU : *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires*. Thèse d'état, Université de Poitiers, France, 1987.

- J. C. TRIGEASSOU et T. POINOT : *Identification des systèmes*, chapitre Identification des systèmes à représentation continue - Application à l'estimation de paramètres physiques, pages 177–211. Hermès, Paris, 2001.
- U.S. ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY : *Enhanced coagulation and enhanced precipitative softening guidance manual*. National Service Center for Environmental Publications, Cincinnati, OH, USA, 1999.
- U.S. ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY : *Arsenic removal from drinking water by coagulation/filtration and lime softening plants*. National Service Center for Environmental Publications, Cincinnati, OH, USA, 2000.
- P. M. J. VAN DEN HOF : Criterion based equivalence for equation error models. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34 (2):191–193, 1989.
- E. WALTER et L. PRONZATO : *Identification of parametric models from experimental data*. Communications and Control Engineering Series, Springer Verlag, 1997.
- L. K. WAN, Y. HUNG et N. K. SHAMMAS : *Physicochemical treatment processes*, volume 3 de *Handbook of Environmental Engineering*. Humana Press, 1st édition, 2005.
- WATER ENVIRONMENT FEDERATION : *Operation of municipal wastewater treatment plants*. McGraw-Hill Professional, 6th édition, 2007.
- WATER ENVIRONMENT FEDERATION : *Industrial wastewater management, treatment, and disposal*. McGraw-Hill Professional, 3 édition, 2008.
- P. YOUNG : An instrumental variable for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6:271–287, 1970.
- P. YOUNG : The refined instrumental variable method : unified estimation of discrete and continuous-time transfer function models. *APII-Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 42:149–179, 2008.
- F. ZAVISKA, P. DROGUI, G. MERCIER et J. F. BLAIS : Procédés d'oxydation avancée dans le traitement des eaux et des effluents industriels : Application à la dégradation des polluants réfractaires. *Water science*, 22 (4):535–564, 2009.
- K. ZHOU, J.C. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.

Abstract

The main goal of the PhD thesis focuses on the optimization of an advanced oxidation process by implementing the modern control tools.

The considered process is a lab-scale pilot of industrial wastewater treatment by catalytic ozonation. The optimization of this process is achieved by controlling the pollutant abatement while minimizing the high operating costs. The online measurement of the pollutant concentration is provided by the absorbance which is correlated with COD. Therefore, the process is considered as a system with one input, the ozone generator power, and two outputs, the ozone gas concentration at the top of the reactor and the absorbance.

A linear model of the process was identified. It allowed calculating the control laws. And a nonlinear model, with a so-called Wiener model structure, was also identified to test the controllers in simulation before the experiments.

The three control methods applied, the internal model control, the optimal control and the H_∞ control, allow rejecting disturbance on the pollutant concentration of the effluent to be treated. The stability of closed-loop system with delayed control input was analyzed.

The experimental results show the significant benefits provided by this closed-loop system.

The methodology developed for this application can be extended to other processes to facilitate the industrial development of advanced oxidation processes.

Key words : Robust control ; System identification ; Catalytic ozonation ; Advanced oxidation process (AOP) ; Wastewater treatment.

Résumé

Le principal objectif de la thèse est l'optimisation d'un procédé d'oxydation avancée par la mise en œuvre des outils de l'automatique moderne.

Le procédé considéré concerne l'ozonation catalytique utilisé pour traiter les eaux résiduelles industrielles. L'optimisation de ce procédé consiste à contrôler l'abattement des polluants tout en minimisant le coût de fonctionnement du procédé. La mesure en ligne de la concentration en polluant est fournie par l'absorbance, grandeur corrélée à la *DCO*. Le procédé est alors considéré comme un système à une entrée, la puissance du générateur d'ozone, et deux sorties, l'ozone dans les événements et l'absorbance.

L'identification du procédé a mené à l'estimation d'un modèle linéaire pour construire les lois de commande et d'un modèle non-linéaire, de type modèle de Wiener, pour tester les correcteurs en simulation avant les essais expérimentaux.

Les trois commandes testées, la commande par modèle interne, la commande optimale et la commande H_∞ , permettent de rejeter des perturbations sur la concentration en polluant dans les effluents à traiter. Des analyses de stabilité du système bouclé, vis-à-vis de retards sur la commande, ont été menées.

Les résultats expérimentaux obtenus ont permis de conclure sur les gains significatifs apportés par ces développements.

La méthodologie développée pour cette application peut être étendue à d'autres procédés afin de faciliter le développement industriel des procédés d'oxydation avancée.

Mots clés : Commande robuste ; Identification de système ; Ozonation catalytique ; Procédé d'oxydation avancée (POA) ; Traitement des eaux.